Ergebnisraum

===

Die Menge der bei einem Zufallsexperiment möglichen Ergebnisse bilden den Ergebnisraum Ω des Zufallsexperiments.

Die Anzahl n der Elemente von Ω heißt **Mächtigkeit** $|\Omega|$ von Ω. Man schreibt

$$\boxed{|\Omega| = n}$$

Prüfungsaufgaben :

a) Bestimmung von Ergebnisräumen

b) Ermittlung der Mächtigkeit von Ergebnisräumen mit Hilfe kombinatorischer Mittel oder Baumdiagrammen.

Ein Gerätehersteller führt vor jeder größeren Lieferung folgenden Test durch.

Es werden nach-einander Geräte "mit Zurücklegen" geprüft, bis das zweite einwandfreie bzw. das zweite mangelhafte Gerät aufgetreten ist.

Im ersten Fall wird die Lieferung freigegeben, im zweiten Fall zurückbehalten.

Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an.

Ereignisraum

===

Jede Teilmenge A eines Ergebnisraums eines Zufallsexperiments heißt Ereignis des Zufallex-periments.

A und B zwei Ereignisse, dann ist definiert

$\overline{A}$: A tritt nicht ein $A \cap B$: A und B treten ein $A \cup B$: A und B treten ein

Gesetze von ***de Morgan***

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}} \text{ und } \boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

Prüfungsaufgaben :

a) Mengentheoretische Beschreibung von Ereignissen.

b) Wortbeschreibung von Ereignissen

Relative Häufigkeit
===
Tritt ein Ereignis A bei der n-maligen Durchführung eines Zufallsexperiments z-mal auf,

dann ist die relative Häufigkeit $h_n(A)$ definiert durch

$$\boxed{h_n(A) = \frac{z}{n}}$$

z heißt absolute Häufigkeit des Ereignisses A

Prüfungsaufgaben :

a) Bestimmung relativer Häufigkeiten

b) Grenzwertsatz der großen großen Zahlen

Wahrscheinlichkeit
===
Eine auf einer Ereignisalgebra $\mathfrak{A}$ eines Zufallsexperiments definierte Funktion P heißt Wahrssheinlichkeit, wenn gilt

(1) $P(A) \geq 0$ für alle Ereignisse $A \in \mathfrak{A}$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für alle Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ ist.

Bemerkung : Zwei Ereignisse A und B mit $A \cap B = \emptyset$ heißen unvereinbar.

Es gilt dann u. a.

(4) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(6) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Prüfungsaufgaben :

a) Angabe der Axiome von Kolgomorow

b) Beweis von Folgerungen

c) Berechnung von Wahrscheinlichkeiten unter zu G´Hilfenahme der Gesetze

---

Laplace-Experimente

Ein Zufallsexperiment heißt ***Laplace***-Experiment, wenn alle einelementigen Ereignisse gleich wahrscheinlich sind.

Ist A ein Ereignis und Ω der Ergebnisraum, dann gilt

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

Prüfungsaufgaben :

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Kombinatorik oder Baumdiagrammen.

Dazu muss evtl. eine Verfeinerung des Ergebnisraumes Ω so vergenommen werden, dass das Zufallsexperiment als Laplace-Experiment aufgefasst werden kann.

Kombinatorik

1. Summenregel

   Sind A und B zwei Mengen mit $A \cap B = \emptyset$, dann $\boxed{|A \cup B| = |A| + |B|}$

2. Prinzip vom Ein- und Ausschluss

   Sind A und B zwei Mengen, dann gilt $\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap b|}$

3. Produktregel

   Sind A und B zwei Mengen, dann gilt $\boxed{|A \times B| = |A| \cdot |b|}$

4. Variationen mit Wiederholung

   Ist A eine Menge mit $|A|$ 0 N, dann nennt man die k-Tupel von

   $$A^k = A \times .... \times A = \left\{ (a_1|....|a_k) \,\middle|\, a_i \in A \text{ mit } 1 \le i \le k \right\}$$

   k-Variationen mit Wiederholung. Ihre Anzahl beträgt $\boxed{V_{mW}(n;\, k) = \left|A^k\right| = |A|^k = n^k}$

5. Variationen ohne Wiederholung

Ist A eine Menge, dann nennt man die k-Tupel von

$$A^k = A \times .... \times A = \left\{ (a_1|....|a_k) \,\middle|\, a_i \in A \wedge a_i \neq a_j \text{ falls } i \neq j \text{ mit } 1 \leq i, j \leq k \right\}$$

k-Variationen ohne Wiederholung. Ihre Anzahl beträgt

$$\boxed{V_{oW}(n; k) = n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{k!}}$$

6. Permutationen ohne Wiederholung

Die Anordnung der Elemente einer Menge in einer Reihe nennt man eine Permutation.

Die Anzahl der verschiedenen Permutationen der Elemente einer b-elementigen Menge ist

$$\boxed{P_{oW}(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot 2 \cdot 1}$$

7. Permutationen mit Wiederholung

Ordnet man k verschiedene Elemente einer Menge so an, dass das i.te Element n_i-mal vorkommt, dann bezeichnet man die Aordnung eine Permutation mit Wiederholung.

Ihre Anzahl dieser Permutationen mit Wiederholung ist

$$\boxed{P_{mW}(n_1; ....; n_k) = \frac{(n_1 + ... + n_k)!}{n_1! \cdot .... \cdot n_k!}}$$

8. Kombinationen ohne Wiederholung

Die Auswahl von k verschiedenen Elementen aus einer n-elementigen Menge nennt man eine k-Kombination ohne Wiederholung.

Die Anzahl der k-Kombinationen einer n-elementigen Menge ohne Wiederholung ist

$$\boxed{K_{oW}(n; k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

9. Kombinationen mit Wiederholung

Wählt aus einer n-elentigen Menge k-mal ein jeweils ein Element aus und kann jedes Element mehrmals ausgewählt werden, dann bezeichnet man dieseAuswahl als k-Kombination mit Wiederholung.

Die Anzahl der k-Kombinationen einer n-elementigen Menge mit Wiederholung ist

$$\boxed{K_{oW}(n;\, k) \;=\; \frac{(n+k-1!}{n! \cdot (k-1)!} \;=\; \binom{n+k-1}{n}}$$

Prüfungsaufgaben :

a) Bestimmung der Anzahl von Anordnungen und Auswahlmöglichkeiten

b) Bestimmung der Mächtigkeit von Ereignissen und Ergebnisräumen

c) Baumkombinatorik

Zehn befreundete Ehepaare setzen sich in eine Reihe, die 20 Plätze umfasst. Wie viele Sitzordnungen gibt es,wenn

a) sich die Personen beliebig setzen

b) die Ehepartner nebeneinander sitzen

c) die Frauen nebeneinander sitzen ?

Für eine Abschlußprüfung werden 4 Aufgaben im Fachgebiet A, 6 Aufgaben im Fachgebiet B und 3 Aufgaben im Fachgebiet C angeboten.

Wie viele Möglichkeiten der Aufgabenzusammenstellung hat ein Prüfling, wenn er 4 Aufgaben zu lösen hat und aus jedem Fachgebiet mindestens eine Aufgabe wählen muss ?

Für die Vorrunde werden vier Gruppen I, II, III und IV zu je vier Mannschaften ausgelost, wobei es innerhalb einer Gruppe nicht auf die Reihenfolge der Mannschaften ankommt.

a) Wie viele Möglichkeiten der Gruppeneinteilung gibt es ?

b) Mit welcher W'keit werden die beiden spielstärksten Mannschaften in dieselbe Gruppe gelost ?

An einer Tankstelle wird jedes tankende Auto überprüft, ob es mit einem Katalysator ausgerüstet ist (K-Auto) oder nicht.

In einer Schlange von 20 Autos vor der Tankstelle stehen genau 5 K-Autos.

a) Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es, wenn man nur K-Autos und Nicht-K-Autos unterscheidet ?

b) Mit welcher W'keit stehen die fünf K-Autos in der 2. Hälfte der Schlange ?

c) Mit welcher W'keit stehen die fünf K-Autos hintereinander ?

Ein Glücksspielautomat liefert Lose, auf denen jeweils eine siebenstellige Zahl aufgedruckt ist. Diese siebenstellige Zahl besteht nur aus den Ziffern 1 und 2.

Die Ziffer 1 wird dabei mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 und die Ziffer 2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 erzeugt.

Bestimmen Sie die W'keiten folgender Ereignisse :

E_1 : Die aufgedruckte Zahl beginnt mit 222

E_2 : Auf den ersten vier Stellen kommt die Ziffer 2 genau zweimal vor

E_3 : Die aufgedruckte Zahl ist kleiner als 1112111

Urnenexperimente (hypergeometrische Verteilung)

===

Haben in einer Urne mit N nicht unterscheidbare Kugeln M der Kugeln eine bestimmte Eigenschaft, dann beträgt die Wahscheinlichkeit bei der gleichzeitigen Entnahme von n Kugeln genau k Kugeln mit dieser Eigenschaft zu ziehen

$$\boxed{P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Dabei ist $M \leq N$, $n \leq N$, $k \leq n$ und $k \leq M$ vorausgesetzt.

Prüfungfragen :

Anwendungen der Formel

In einer Schachtel mit 12 Golfbällen befinden sich 3 unbrauchbare. Ein Spieler greift zufällig 4 Bälle aus dieser Schachtel.

Wie groß ist die W'keit dafür, dass er höchstens einen unbrauchbaren Ball entnimmt ?

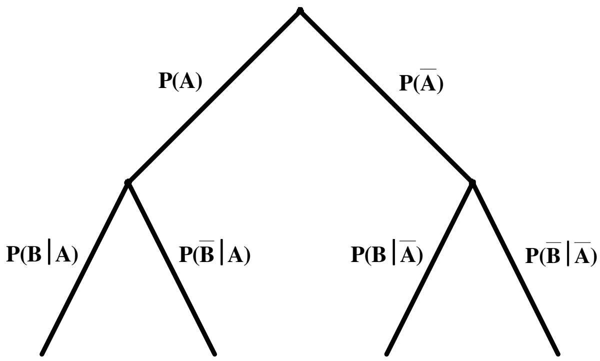
Bedingte Wahrscheinlichkeit und Pfadregeln - die Formel von Bayes
===

Ist Ω der Ergebnisraum und $\mathfrak{A}$ eine zugehörige Ereignisalgebra mit der Wahrscheinlichkeit P

sowie A, B $\in \mathfrak{A}$ zwei Ereignisse mit $P(A) \neq 0$.

Dann heißt $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Voraussetzung B.



1. Pfadregel

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$$

2. Pfadregel

$$\boxed{P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(A) \cdot P(B \mid \overline{A})}$$

Formel von ***Bayes***

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}}$$

Prüfungsfragen :

Anwendungen der Formeln

Die Fernsehsendung "Sport TV" berichtet über das Sportgeschehen.

Bei "Sport TV" treten Bildstörungen mit 4 % W'keit auf.

Ist das Bild gestört, dann kommt es mit 60 % Wahrscheinlichkeit auch noch zu Tonstö run-gen. Ist das Bild einwandfrei, dann ist auch der Ton mit 90 % W'keit in Ordnung.

Verwenden Sie folgende Bezeichnungen :

B : Bei "Sport TV" treten Bildstörungen auf',

T : Bei "Sport TV" treten Tonstörungen auf".

a) Untersuchen Sie B und T auf stochastische Unabhängigkeit.

b) Wie groß ist die W'keit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist ?

c) Falls das Bild nicht gestört ist, tritt das Ereignis

Z : Ein Zuschauer schaltet während der Sendung um

höchstens mit der Wahrscheinlich keit $\frac{1}{6}$ ein.

Welchen größtmöglichen Wert kann die W'keit P(Z) annehmen ?

Mit einer elektronischen Anlage wird am Ausgang eines Kaufhauses überprüft, ob ein Kunde unbezahlte Ware bei sich führt.

Bei Kaufhausdieben spricht die Anlage n-dt einer Wahrscheinlichkeit von 95 % an, allerdings auch bei ehrlichen Kunden mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 %.

40 % der Verdachtsfälle erweisen sich als gerechtfertigt.

Wie groß ist demnach der Anteil der Diebe unter allen Kunden ?

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B aus der Ereignisalgebra eines Zufallsexperiments mit P(A), P(B) ≠ 0 heißen **unabhängig** voneinander, wenn gilt

$$P(B \mid A) = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A \mid B) = P(A)$$

Sind A und B voneinander unabhängig, dann auch A und $\overline{B}$, $\overline{A}$ und B sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$.

Prüfungsaufgaben :

Untersuchung von Ereignissen auf Unabhängigkeit mit einer Vierfeldertafel.

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

oder Baumdiagrammen

Ein Kunde eines Kaufhauses benutzt mit einer W'keit von 75 % die hauseigene Tiefgarage. Mit einer W'keit von 40 % bleibt ein Kunde länger als 30 Minuten ini Kaufhaus (Langzeitbesucher). Die Ereignisse

T: " Tiefgaragenbenutzer" und L: "Langzeitbesucher"

seien stochastisch unabhängig.

a) Mit welcher W'keit ist ein beliebiger Kunde weder Tiefgaragenbenutzer noch Langzeitbesucher ?

b) An einer Kasse stehen drei Kunden. Mit welcher W'keit ist mindestens einer davon ein Tiefgaragenbenutzer und nicht gleichzeitig Langzeitbesucher ?

Zufallsgrößen

==

Ist Ω der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, dann heißt eine Funktion

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

eine Zufallsgröße.

Ist $W_X = \left\{x_1; ....; x_n\right\}$ die Wertemenge von X und $A_i = \left\{\omega_j \,\middle|\, \omega_j \in \Omega \text{ und } X(\omega_j) = x_i\right\}$,

dann heißt die Funktion

$P : W_X \to \mathbb{R}$ mit $P(X = x_i) = P(A_i)$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Veranschaulicht wird sie mit einem Histogramm oder Strichdiagramm.

Die Funktion

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = P(X \le x)$

heißt Verteilungsfunktion. Ihr Graph hat treppenförmiges Aussehen.

$$\boxed{\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + ... + x_n \cdot P(X = x_n)}$$

heißt Erwartungswert von X.

$$\boxed{Var(X) = E\left((X - \mu)^2\right) = E(X^2) - \mu^2}$$

heißt Varianz von X.

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

nennt man Standardabweichung.

Ist X eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = E(X)$, dann gilt für die Zufallsgröße

$Y = a \cdot X + b$

mit festen reellen Zahlen a und b

$$E(Y) = a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu + b \text{ und } \mathrm{Var}(Y) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$$

Prüfungsfragen :

a) Ermitteln von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und graphische Darstellung mit einem Strichdiagramm bzw. Histogramm.

b) Zeichnen des Graphen der Verteilungsfunktion einer Zufallgröße.

c) Berechnen von Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße.

d) Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten mit der Ungleichung von Tschebyschow

e) Anwendung auf Glücksspiele : Gewinn und Reingewinn, Einsatz

---

Ein Computer drucke Wörter in einer zufälligen Reihenfolge aus. Jedes Wort, das den den Buchstaben "i" enthält, heiße i-Wort.

Ein Computer drucke Wörter in einer zufälligen Reihenfolge aus. Jedes Wort, das den den Buchstaben "i" enthält, heiße i-Wort.

Die W'keit für den Ausdruck eines i-Wortes betrage $p = 0{,}4$.

Der Computer berechnet nun die Programmausführung nach dem dritten ausgedruckten i -Wort ab, spätestens aber nach dem sechsten Wort.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße X.

Ungleichung von Tschebbyscheff

==

Ist X eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert μ und $\mathrm{Var}(X) > 0$ und ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,dann gilt

$$\boxed{\begin{array}{ccc} P(\left|X-\mu\right| > \varepsilon) < \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} & \Leftrightarrow & P(\left|X-\mu\right| \le \varepsilon) > 1 - \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \\ P(\left|X-\mu\right| \ge \varepsilon) \le \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} & \Leftrightarrow & P(\left|X-\mu\right| < \varepsilon) \ge 1 - \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \end{array}}$$

Prüfungsfragen :

Abschätzungen im Zusammenhang mit Zufallsgrößen

Mittelwert

==

Wird ein Zufallsexperiment n-mal ausgeführt und X_i mit $1 \le i \le n$ der Wert den eine Zufallsgröße X beim i.ten Versuch annimmt, dann gilt

$$E(X_i) = E(X) \text{ und } \mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X) \text{ für alle i mit } 1 \le i \le n.$$

Die Zufallsgröße

$$\boxed{\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}}$$

heißt dann Mittelwert von X. Es ist

$$\boxed{E(\overline{X}) = E(X)} \text{ und } \boxed{\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n}\cdot\mathrm{Var}(X)}$$

Prüfungsfragen :

Abschätzungen im Zusammenhang mit der Ungleichung von Tschebyschow

---

Die Seitenflächen eines gezinkten Tetraeders sind mit den die Ziffer 1, 2, 3, 4 beschriftet. Als Ergebnis X eines Wurfes zählt die Ziffer auf der Grundfläche.

Für X gilt die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(X=1) = \frac{1}{4}\,,\ P(X=2) = \frac{1}{3}\,,\ P(X=3) = \frac{1}{4}\,,\ P(X=4) = \frac{1}{6}$$

Jetzt werden Serien von n unabhängigen Würfen mit dem Tetraeder betrachtet. Die Zufallsgröße sei das arithmetische Mittel $\overline{X}$ von n geworfenen Ziffern.

a) Errechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße $\overline{X}$:

b) Ab wieviel Würfen weicht $\overline{X}$ rnit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 90% um höchstens 0,1 von seinem Erwartungswert ab ?

Geben Sie eine Abschätzung nach Tschebyschow.

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitverteilung zweier Zufallsgrößen
==

Sind X und Y zwei auf dem gleichen Ergebnisraum Ω definierte Zufallsgrößen mt

$W_X = \left\{ x_1; ....; x_n \right\}$ und

dann heißt

$P : W_X \times W_Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit $P(x_i, y_j) = P(X = x_i \wedge Y = y_j)$

die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und Y.

Die beiden Zufallsgrößen heißen voneinander unabhängig, wenn

$P(X = x_i \wedge Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$

Prüfungsfragen :

a) Bestimmen der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsgrößen.

b) Untersuchung zweier Zufallsgrößen auf Unabhängigkeit.

Summe und Produkt zweier Zufallsgrößen
==

Sind X und Y zwei auf dem gleichen Ergebnisraum Ω definierte Zufallsgrößen,dann heißt

$X + Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$

die Summe und

$X \cdot Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$

das Produkt dieser Zufallsgrößen.

Es ist

$$\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

Sind X und Y voneinander unabhängig, dann gilt $\boxed{Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)}$

und $\boxed{E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)}$

Prüfungsfragen :

a) Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe oder des Produkts zweier Zufallsgrößen.

b) Berechnungen des Erwartungswertes bzw. der Varianz der Summe oder des Produkts zweier Zufallsgrößen.

Auf dem Weg zur Arbeitsstätte hat ein Autofahrer 2 Verkehrsampeln und dann einen Bahnüergng zu passieren.

Unabhängig voneinander hat er an den Ampeln mit je 30%,am Bahnübergang mit 90% W'keit freie Fahrt.

An jeder Ampel muss er mit 40% W'keit nur 1 Minute, mit 30% W'keit 2 Minuten warten,am Bahnübergang hat er mit 10% W'keit eine Wartezeit von 3 Minuten.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen

X_i : Wartezeit an der Ampel i ($i = 1,2$)

Y : Wartezeit am Bahnübergang,

und berechnen Sie damit Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße

Z : Gesamtwartezeit.

b) Mit welher (bedingten) W'keit ist die Wartezeit an Ampeln und Bahnübergang zusammen mindestens 5 Minuten, wenn der Autofahrer an der ersten Ampel 2 Minuten warten muss ?

Aus langjähriger Erfahrung weiß man bei einer Fluggesellschaft, dass Gepäckstücke ein durchschnittliches Gewicht von 18 kg bei einer Standardabweichung von 5 kg besitzen.

Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow - Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass bei 300 aufgegebenen Gepäckstücken das Gesamtgewicht zwischen 4800 kg und 6000 kg liegt.

Für die Berechnung darf angenommen werden, daß das Gewicht der Gepäckstücke voneinander unabhängig ist.

Binomialverteilung

==

Ein Zufallsexperiment mit der der Ereignisalgebra $\mathfrak{A} = \left\{\emptyset, T, \overline{T}, \Omega\right\}$ heißt Bernoulli-Experiment.

Das Ereignis T bezeichnet man als Treffer und die Wahrscheinlichkeit $p = P(T)$ als Trefferwahrscheinlichkeit.

Es ist dann $P(\overline{T}) = 1 - p = q$.

Die n-malige Ausführung eines Bernoulli-Experiments heißt **Bernoullikette** der Länge n, wenn

a) bei jeder Durchführung des Bernoulli-Experiments $P(T) = p$ und $P(\overline{T}) = q = 1 - p$ ist.

b) Die Ereignisse

T_i : Treffer bei der i.ten Durchführung des Experiments, $1 \le i \le n$,

voneinander unabhängig.

Ist die Zufallsgröße X gleich der Anzahl der Treffer bei einer Bernoullikette der Länge n, dann gilt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

$$\boxed{P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

Als Erwartungswert bzw. Varianz von X erhält man

$$\boxed{E(X) = np} \text{ und } \boxed{Var(X) = npq}$$

Für die Verteilungsfunktion F_p^n von X gilt

$$\boxed{F_p^n(k) = P(X \le k) = \sum_{i==}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}}$$

Prüfungsfragen :

a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Trefferanzahl

b) Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten

c) Bestimmung der Bestimmung der Mindestlänge einer Bernoullikette damit mit einer Mindestwahrscheinlichkeit ein Treffer erzielt wird.

c) Bestimmung der Mindestwahrscheinlichkeit, die erforderlich ist, um bei gegebener Länge einer Bernoulli-Kette mindestens einen Treffer zu erzielen.

d) Bestimmung eines Intervalls, in dem die Trefferzahl mit einer Mindestwahrscheinlichkeit liegt (meist symmetrisch zum Erwartungswert $n \cdot p$ der Trefferanzahl).

Ein Theater hat 200 Plätze. Man weiß aus Erfahrung, dass bei einer Aufführung ein Platz mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% verkauft wird.

Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Ereignisse unabhängig sind.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für die nächste Aufführung mindestens 185 Plätze verkauft ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man bei den drei folgenden Vorstellungen mindestens noch einmal mit diesem guten Besuch von wenigstens 185 Personen rechnen ?

Die Wahlbeteiligung beträgt 40%.

Wie groß muss eine Gruppevon Wahlberechtigten mindestens sein, damit mit mehr als 98% W'keit wenigstens eine Person darunter ist, die nicht an der Wahl teilgenommen hat ?

In einem Sportstudio ist ein Basketballkorb aufgebaut. Ein Studiogast treffe mit einer W'keit p in den Korb.

Wie groß muss p mindestens sein, damit der Gast bei 6 Versuchen mit einer W'keit von wenig-stens 95 % mindestens einmal trifft ?

Gurtmuffel sind Autofahrer, die während der Fahrt keinen Sicherheitsgurt tragen. Es wird angenommen, dass die Autolenker unabhängig voneinander den Gurt anlegen oder nicht anlegen.

Es werden 200 Autos auf einer Straße mit dem bekannten Gurtmuffelanteil $p = 15\%$ überprüft. X ist die Anzahl der dabei entdeckten Gurtmuffel.

Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Bereich symmetrisch um den Erwartungswert von X, in dem die Zahl der entdeckten Gurtmuffel mit mindestens 90% W' liegt.

Das Gesetz der großen Zahlen
==
Ist X die die Anzahl der Treffer bei einer Bernoullikette, dann gelten die Ungleichungen von Tschebbyscheff

$$\boxed{\begin{array}{c} P(\left|X - np\right| > \varepsilon) < \dfrac{npq}{\varepsilon^2} \iff P(\left|X - np\right| \leq \varepsilon) > 1 - \dfrac{npq}{\varepsilon^2} \\ P(\left|X - np\right| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{npq}{\varepsilon^2} \iff P(\left|X - np\right| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{npq}{\varepsilon^2} \end{array}}$$

Die Zufallsgröße $H_n(X)$ ist die relative Häufigkeit der Treffer mit demErwartungswert p und der Varianz $\frac{pq}{n}$.

Für sie gilt

$$\boxed{\begin{array}{c} P(\left|H_n(X) - p\right| > \varepsilon) < \dfrac{pq}{n\varepsilon^2} \iff P(\left|H_n(X) - p\right| \leq \varepsilon) > 1 - \dfrac{pq}{n\varepsilon^2} \\ P(\left|H_n(X) - p\right| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{pq}{n\varepsilon^2} \iff P(\left|H_n(X) - p\right| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{pq}{n\varepsilon^2} \end{array}}$$

d.h. mit wachsender Versuchsanzahl geht die Wahrscheinlickeit, dass die relative Häufigkeit um mehr als ε von der Trefferwahrscheinlichkeit p abweicht, gegen Null.

ε ist dabei eine beliebige positive Zahl.

Sind p und damit q unbekannt, dann nimmt man $p = q = \frac{1}{2}$ an.

Prüfungsfragen :

a) Abschäzen einer unbekannten W'keit p.

b) Bestimmung von von n und ε.

Durch eine Umfrage soll der Anteil p der Fachbesucher unter allen Besuchern einer Messe bestimmt werden.

Wie viele Personen müssen mindestens befragt werden, damit man den Anteil p mit mindestens 80 % Sicherheit bis auf eine Abweichung von weniger als 0,02 ermitteln kann ?
Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschow.

Normalverteilung

==

Die Dichtefunktion φ_n (Treppenfunktion, die ein Histogramm oben berandet) der standardisierten Binomialverteilung B(n; p) geht mit wachsendem n gegen die Grenzfunktion

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}}$$

φ heißt deshalb Dichte der **Standardnormalverteilung**.

Für große n (npq $>$ 9) gilt deshalb :

$$\boxed{B(n; p; k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(k-np)^2}{npq}}} \text{ (\textbf{lokale Näherung})}$$

und

$$\boxed{P(k_1 \le X \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np + 0{,}5}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np - 0{,}5}{\sqrt{npq}}\right)}$$

bzw.

$$\boxed{P(k_1 \le X \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)}$$

Speziell gilt (integrale Näherungsformel bzw. Laplace - Näherung) :

$$\boxed{P(X = k) \approx \Phi\left(\frac{k - np + 0{,}5}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k - np - 0{,}5}{\sqrt{npq}}\right)}$$

Prüfungsfragen :

a) Berechnung von Wahrscheinlicheiten

b) Berechnung der Mindestlänge einer Bernoullikette

c) Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeit

d) Bestinnung eines Intervalls für die Anzahl der Treffer

Bestimmen Sie unter der Annahme eines Wähleranteils von 20% für eine Partei die W'keit dafür, dass die Partei von 650 abgegebenen Briefwahlstimmen weniger als 120 erhält.

Einn Reiseunternehmen chartert ein Flugzeug, das 250 Passagiere aufnehmen kann, für Flüge nach Gransolio.

Das Reiseunternehmen weiß aus Erfahrung, dass ein gebuchter Platz nur mit der W'keit 0,9 auch tatsächlich belegt wird.

Daher ist das Reiseunternehmen dazu übergegangen, die Flüge um 10% überbuchen zu lassen. Das bedeutet. dass füir jeden Flug 275 Plätze verkauft werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle Personen, welche die Reise wirklich antreten vollen, mit dem Flugzeug befördert werden können ?

Zentraler Grenzwertsatz

===

Sind $X_1, X_2, ..., X_n$ auf dem gleichen Ergebnisraum Ω definierte, identisch verteilte und voneinander unabhängige Zufallsgrößen,

so ist ihre Summe $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ für genügend großes n annähernd normalverteilt d. h.

$$\boxed{\mathbf{P(X \leq x) \approx \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})}} \text{ mit } \mu = E(X) = n \cdot E(X_1) \text{ und } \sigma^2 = n \cdot Var(X_1)$$

Prüfungsfragen :

Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten

In einer Spezialklinik hält sich jeder Patient (unabhängig von anderen Patienten) mindestens 3 Tage, höchstens aber 5 Tage auf.

Die Verwaltung legt für die Aufenthaltsdauer X eines Patienten in Tagen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde:

k	3	4	5
$P(X=k)$	60%	10%	30%

Jeder Patient zahlt für die Aufnahme 110€ Verwaltungsgebühr und 450 € pro Aufenthaltstag.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße

Y: Einnahmen pro Patient (in €).

b) Die Klinik benötigt jährlich mindestens 4,4 Millionen Euro Ein-nah-men. Mit welcher W'keit wird bei einer jährlichen Belegung von 2500 Patienten mindestens dieser Betrag erreicht ?

Nach dem zentralen Grenzwertsatz kann die Normalverteilung zugrunde gelegt werden.

Hypothesentest

==

Alternativtest

Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ Gegenhypothese $H_1 : p = p_1$

	H_0 wird angenommen	H_0 wird abgelehnt
H_0 ist wahr	richtige Entscheidung	falsche Entscheidung (Fehler 1. Art)
H_1 ist wahr	falsche Entscheidung (Fehler 2. Art)	richtige Entscheidung

Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1.Art : $\alpha = P_{p=p_0}(X \in \overline{\mathbb{A}})$

Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2.Art : $\beta = P_{p=p_1}(X \in \mathbb{A})$

Rechtsseitiger Hypothesentest

Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ Gegenhypothese $H_1 : p > p_0$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{0, 1, ..., k\right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{k+1, ..., n\right\}$

Fehler 1.Art : $\alpha = P_{p=p_0}(X \in \overline{\mathbb{A}})$

Obere Schranke für den Fehler 2.Art : $\beta = P_{p=p_0}(X \in \mathbb{A})$

Linksseitiger Hypothesentest

Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ Gegenhypothese $H_1 : p < p_0$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{k+1, ..., n\right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0, ..., k\right\}$

Fehler 1.Art : $\alpha = P_{p=p_0}(X \in \overline{\mathbb{A}}) = P(X \le k)$

Obere Schranke für den Fehler 2.Art : $\beta = P_{p=p_0}(X \in \mathbb{A}) = P_{p=p_0}(X \ge k+1)$

Zweiseitiger Hypothesentest

Nullhypothese $H_0 : p = p_0$ Gegenhypothese $H_1 : p \neq p_0$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{k_1 + 1, ..., k_2\right\}$

Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0, ..., k_1\right\} \cup \left\{k_2 + 1, ..., n\right\}$

Fehler 1.Art : $\alpha = P_{p = p_0}(X \in \overline{\mathbb{A}}) = P(X \leq k_1) + P(X \geq k_2 + 1)$

Obere Schranke für den Fehler 2.Art : $\beta = P_{p = p_0}(X \in \mathbb{A}) = P_{p = p_0}(k_1 + 1 \leq X \leq k_2)$

Ein Hypothesentest heißt signifikant, wenn der Fehler 1. Art kleiner oder gleich 5% ist.

Ist der Fehler 1. Art nicht größer als 1%, dann liegt hochsignifikanter Test vor.

Prüfungsaugaben

a) Berechnung der Fehler 1. und 2. Art.

b) Bestimmung des Annahme- und Ablehnungsbereichs bei vorgebenem Fehler 1. oder 2. Art.

c) Entscheidung über Annahme oder Ablehnung eines Tests.

Die Partei B will bei der Wahl mehr als 25% der Stimmen erreichen. Um zu entscheiden, ob dazu ein besonders harter Wahlkampf nötig ist, testet sie die Nullhypothese

H_0 : Der Anteil der B-Wähler ist höchstens 25%

durch eine Umfrage bei 200 Wahlberechtigten.

a) Wie viele Personen müssen sich mindestens für eine Partei B entscheiden, damit man die Nullhypothese auf Grund dieser Umfrage auf dem 2%-Niveau verwerfen kann ?

b) Wie groß ist dann die W'keit dafür, dass die Partei B einen besonders harten Wahlkampf führt, obwohl sich schon 30% der Wähler für die Partei B ent schieden haben ?

Für Aussteller ist eine Messe auch deshalb interessant, weil durch Beratungsgespräche Verkaufsabschlüsse herbeigeführt werden können.

In der Branche kalkuliert man, dass höchstens 15 % der Beratungsgegespräche zu einem Verkaufsabschluß führen. Ein Aussteller vermutet, dass er durch seine überzeugende Art mehr neue Kunden gewinnt.

Von 280 Beratungsgesprächen erreicht er bei 55 einen Verkaufsabschluß. Kann er auf Grund dieses Ergebnisses die Nullhypothese

H_0 : Höchstens 15 % meiner Gespräche führen zu einem Verkaufsabschluß

auf dem 5% - Niveau verwerfen ?