Vektor- und Spatprodukt

==

1. Berechnen Sie folgende Vektorprodukte

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3t \\ 3 \\ 2t \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ 2t \end{pmatrix}$

---

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC

a) $A(7 \mid -3 \mid 1)$, $B(2 \mid 0 \mid 5)$, $C(9 \mid -3 \mid 1)$ b) $A(5 \mid 2 \mid -8)$, $B(7 \mid 8 \mid 13)$, $C(11 \mid 8 \mid 11)$

---

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts den Abstand des Punktes P von der Geraden AB

a) $A(2 \mid 3 \mid 0)$, $B(1 \mid -3 \mid -2)$, $P(5 \mid 8 \mid 4)$ b) $A(1 \mid 2 \mid -1)$, $B(4 \mid 4 \mid -3)$, $P(0 \mid 3 \mid 7)$

---

4. Gegeben sind die Punkte $A(-1 \mid -4 \mid 3)$ und $B(4 \mid 0 \mid 6)$. Bestimmen Sie einen Punkt C auf der x_3-Achse so, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt 12 hat.

---

5. Die Grundfläche ABCD der vierseitigen Pyramide ABCDS ist ein allgemeines Viereck. Es ist $A(2 \mid 3 \mid 9)$, $B(4 \mid 5 \mid 5)$, $C(4 \mid 6 \mid 8)$ und $D(3 \mid 5 \mid 10)$ sowie der Punkt $S(10 \mid 0 \mid 0)$.

   Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

---

6. Die Punkte $A(-2 \mid 3 \mid 1)$, $B(4 \mid -1 \mid 2)$, $C(1 \mid -2 \mid -3)$ bilden die Ecken der Grundfläche eines Tetraeders.

   Die Spitze D liegt in der Ebene mit der Gleichung $E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$ und steht senkrecht über dem Schwerpunkt der Grundfläche.

   a) Welches ist der größte Winkel der Grundfläche ?

   b) Welchen Inhalt hat die Grundfläche ?

   c) Wie lautet die Koordinatengleichung der Grundflächenebene G ?

   d) Wie groß ist die Höhe h des Tetraeders ?

   d) Die Gerade durch die Punkte A und D wird an der Grundflächenebene G gespiegelt.

   Wie lautet die Gleichung der gespiegelten Gerade ?

---

7. Gegeben ist das Dreieck PQR mit $P(0 \mid 0 \mid 0)$, $Q(-4 \mid 3 \mid 2)$ und $R(1 \mid -2 \mid 2)$.

a) Welchen Flächeninhalt hat das Dreiecks PQR ?

b) Die drei Punkte P, Q und R bilden zusammen dem Punkt S eine Pyramide mit der Grundfläche PQR und der Spitze S. Wie lautet die Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen sich die Spitze S bewegen kann, so dass das Volumen V dieser Pyramide 75 beträgt.

---

8. Von einer geraden, quadratischen Pyramide kennt man den Mittelpunkt $M\left(7 \mid 10 \mid 5\right)$ der Grundfläche ABCD, die Spitze $S\left(11 \mid 12 \mid 9\right)$ und einen Punkt $\mathbf{P}\left(\mathbf{10} \mid \mathbf{10} \mid \mathbf{10}\right)$ auf der Seitenkante SA.

Wie lauten die Koordinaten der Punkte A, B, C und D ?

---

9. Gegeben sind die beiden parallelen Geraden

$$p: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie eine dritte Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Wie groß ist der Abstand von p und q ?

b) Eine (gerade) quadratische Pyramide hat ihre Spitze S auf der Geraden g; je zwei benachbarte Ecken der Grundfläche liegen auf p bzw. q.

Welche Koordinaten hat der Punkt S ?

c) Wie lauten die Koordinaten eines weiteren Eckpunktes der Pyramide ?

Kugel und Kegel

---

1. a) Man zeige, dass sich die Kugeln $\vec{x}^2 = 9$ und $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 16$ schneiden.

b) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der der Schnittkreis liegt.

c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius r des Schnittkreises.

---

2. Man bestimme die Gleichungen jener beiden Kugeln mit dem Radius 3, die die Kugel $K: \vec{x}^{\,2} = 36$ in dem Punkt $P(-4 | 2 | 4)$ berühren.

---

3. Eine Kugel mit dem Radius 4,5 berührt die Kugel $K: \vec{x}^{\,2} = 81$ und zugleich die Ebenen $E: x_3 = 1{,}5$ und $F: x_2 = 1{,}5$.

   Der Mittelpunkt von K liegt im ersten Oktanten . Welche Gleichung hat die Kugel ?

---

4. In einem kartesischen Koordinatensystem sind $A(4 | -4 | 4)$, $B(2 | 4 | -2)$ und $C_a(2a-3 | 5a | 6a+3)$, $a \in \mathbb{R}$, gegeben.

   a) Das Dreieck ABC_0 bestimmt eine Ebene E_0. Stellen Sie eine Gleichung von E_0 in Koordinatenform auf.

   b) Bestätigen Sie, dass gilt : $\gamma_0 = \measuredangle AC_0B \approx 77{,}8°$

   c) Wenn alle Werte aus $\mathbb{R}$ durchläuft, bewegt sich C_a auf einer Geraden g. Stellen Sie eine Gleichung von g auf, und zeigen Sie, dass g auf E_0 senkrecht steht.

   d) Zeigen Sie, dass alle Dreiecke ABC_a gleichschenklig sind.

   e) Der Mittelpunkt der Strecke [AB] sei S. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass C_0S das gemeinsame Lot von g und AB darstellt.

---

5. Vom Schnittpunkt S der beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

   werden an die Kugel mit **Mittelpunkt** $\mathbf{M(-5 | 1 | 2)}$ und Radius $r = 3\sqrt{3}$ die Tangenten gelegt. Die Berührungspunkte begrenzen auf der Kugel einen Kleinkreis, der Grundfläche eines Drehkegels mit der Spitze S ist.

   a) Ermitteln Sie den Radius des Kleinkreises.

   b) In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte von Kugel und Kegel ?

Lösungen

==

1. a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35-8 \\ 32-21 \\ 3-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 11 \\ -17 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-20 \\ -12-16 \\ -10-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -28 \\ -10 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3t \\ 3 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t+9 \\ -9t-10t \\ 15-12t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+8t \\ -19t \\ 15-12t \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8t-3\cdot(t-1) \\ 3t-4t \\ 2\cdot(t-1)+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11t+3 \\ -t \\ 6t-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-11t \\ -t \\ -2+6t \end{pmatrix}$

---

2. a) Gegeben : $A(7 \mid -3 \mid 1),\ B(2 \mid 0 \mid 5),\ C(9 \mid -3 \mid 1)$

Seitenvektoren : $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt : $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

Flächeninhalt des Dreiecks ABC : $\mathfrak{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0+64+36} = 5$

b) Gegeben : $A\left(5 \mid 2 \mid -8\right)$, $B\left(7 \mid 8 \mid 13\right)$, $C\left(11 \mid 8 \mid 11\right)$

$$\text{Seitenvektoren : } \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorprodukt : } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 88 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$\text{Flächeninhalt des Dreiecks ABC : } \mathfrak{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12^2 + 88^2 + 24^2} = 46$$

---

3. a) Gegeben : $A\left(2 \mid 3 \mid 0\right)$, $B\left(1 \mid -3 \mid -2\right)$, $P\left(5 \mid 8 \mid 4\right)$

$$\text{Richtungsvektor : } \vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Verbindungsvektor : } \overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorprodukt : } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{Abstand : } d(P;\, AB) = \frac{\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} \right|}{\left| \overrightarrow{AB} \right|} = \frac{\sqrt{196 + 4 + 169}}{\sqrt{1 + 36 + 4}} = \sqrt{\frac{369}{41}} = \sqrt{9} = 3$$

b) Gegeben : $A\left(1 \mid 2 \mid -1\right)$, $B\left(4 \mid 4 \mid -3\right)$, $P\left(0 \mid 3 \mid 7\right)$

$$\text{Richtungsvektor}: \vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Verbindungsvektor}: \overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorprodukt}: \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -22 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Abstand}: d(P; AB) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\sqrt{18^2+22^2+5^2}}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}} = \sqrt{\frac{833}{17}} = \sqrt{49} = 7$$

---

4. Gegeben : $A\left(-1 \mid -4 \mid 3\right)$ und $B\left(4 \mid 0 \mid 6\right)$

Ansatz : $C\left(0 \mid 0 \mid z\right)$

$$\text{Seitenvektoren}: \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{z} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ z-3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorprodukt}: \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ z-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z-24 \\ 18-5z \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bedingung}: \mathfrak{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(4z-24)^2+(18-5z)^2+16^2} = 12$$

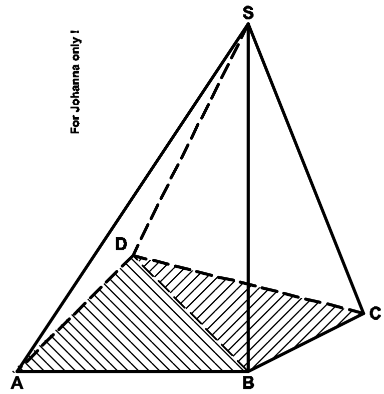
$$\sqrt{(4z-24)^2+(18-5z)^2+16^2} = 24 \quad\Leftrightarrow\quad (4z-24)^2+(18-5z)^2+16^2 = 576$$

$$\Rightarrow \quad z = 0 \ \vee \ z = \frac{290}{41}$$

$$C_1\left(0 \,|\, 0 \,|\, 2\right) \text{ bzw. } C_2\left(0 \,|\, 0 \,|\, \frac{290}{41}\right)$$

---

5. Zur Berechnung des Volumens zerlegt man die Pyramide in zwei Tetraeder ABDS und BCDS.



Aufspannende Vektoren :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{AS} = \vec{s} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & -9 \end{vmatrix} = -36+12+16+64+6+18 = 80 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{v}_{ABDS} = \frac{1}{6} \cdot 80 = \frac{40}{3}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BS} = \vec{s} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 30 - 5 = -20 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{v}_{ABDS} = \frac{1}{6} \cdot \left| -20 \right| = \frac{10}{3}$$

$$\mathfrak{v}_{ABCDS} = \frac{40}{3} + \frac{10}{3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

---

6. Gegeben : $A\left(-2 \,|\, 3 \,|\, 1\right)$, $B\left(4 \,|\, -1 \,|\, 2\right)$, $C\left(1 \,|\, -2 \,|\, -3\right)$ und $E : 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$

a) Der größte Winkel im Dreieck liegt immer der längsten Seite gegenüber.

Seitenvektoren : $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Es ist $\overline{AB} = \sqrt{36+16+1} = \sqrt{53}$, $\overline{AC} = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$

und $\overline{BC} = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$

Der Winkel $\gamma = \angle ACB$ ist der größte Winkel.

Es ist $\cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = \dfrac{16}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{35}} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 67{,}5°$

b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 27 \\ -18 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$$\mathfrak{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{21^2+27^2+18^2} = 1{,}5 \cdot \sqrt{166}$$

c) Koordinatengleichung von E :

$$\begin{vmatrix} x_1+2 & 6 & 3 \\ x_2-3 & -4 & -5 \\ x_3-1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 21x_1 + 27x_2 - 18x_3 - 21 = 0 \quad G: 7x_1 + 9x_2 - 6x_3 - 7 = 0$$

d) Schwerpunkt der Grundfläche : $\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gleichung des Lotes : $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}7\\9\\-6\end{pmatrix}$

Schnitt mit der Ebene E : $E : 3\cdot(1+7\lambda)-2\cdot(-9\lambda)+(-6\lambda)-6 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = -1$

Eingesetzt ergibt sich : $D\left(-6 \mid -9 \mid 6\right)$

Lotvektor : $\overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix}-6\\-9\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-9\\6\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad h = \overline{SD} = \sqrt{49+81+36} = \sqrt{166}$

e) A ist Fixpunkt.

Bildpunkt von D : $\vec{d'} = \vec{d} + 2\cdot\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix}-6\\-9\\6\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}7\\9\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\9\\-6\end{pmatrix}$

Bildgerade AD' : $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}10\\6\\-7\end{pmatrix}$

---

7. Gegeben : $A\left(-1 \mid -4 \mid 3\right)$ und $B\left(4 \mid 0 \mid 6\right)$

a) Seitenvektoren : $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PR} = \vec{r} - \vec{p} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

Vektorprodukt : $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\5\end{pmatrix}$

Flächeninhalt des Dreiecks PQR : $\mathfrak{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{100+100+25} = 7{,}5$

Ansatz : $S\left(x_1 \mid x_2 \mid x_3\right)$

Bedingung : $\frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \right| = -75 \quad \vee \quad \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \right| = 75$

$$\begin{vmatrix} x_1 & -4 & 1 \\ x_2 & 3 & -2 \\ x_3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 450 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 90 = 0$$

bzw. $2x_1 + 2x_2 + x_3 + 90 = 0$

---

8. Gegeben : $M\left(7 \mid 10 \mid 5\right)$, $S\left(11 \mid 12 \mid 9\right)$ und $P\left(10 \mid 10 \mid 10\right)$

Lotvektor : $\overrightarrow{MS} = \vec{s} - \vec{m} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Grundflächenebene G : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit zwei Richtungsvektoren senkrecht zu $\overrightarrow{MS}$.

Koordinatengleichung von G :

$$\begin{vmatrix} x_1 - 7 & 1 & 0 \\ x_2 - 10 & -2 & -2 \\ x_3 - 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2x_1 + 14 - 2x_3 + 10 - x_2 + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 34 = 0$$

Gleichung der Geraden SP : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt von SP mit G ergibt A :

$$2\cdot(11-\lambda)+(12-2\lambda)+2\cdot(9+\lambda)-34 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 9$$

Eingesetzt ergibt sich : $A\left(2 \mid -6 \mid 18\right)$

Für den Eckpunkt C ergibt sich : $\vec{c} = \vec{a} + 2\cdot\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \\ -8 \end{pmatrix}$

Vektor, der auf AM und MS senkrecht steht : $\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -13 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -36 \\ -27 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}$

Wegen $12^2+26^2+8^2 = 15^2+12^2+9^2$ gilt dann für die Ortvektoren der Eckpunkte B und D :

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 22 \\ 14 \end{pmatrix}$$

---

9. Überlegungsfigur :

Gegeben : $p: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Aufpunkte von p bzw q

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt : $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abstand : $d(p;\, p) = \dfrac{\sqrt{144+36+144}}{\sqrt{4+4+1}} = 6$

b) Der Schnittpunkt der Symmetrieebene von p und q mit g ergibt die Spitze S der Pyramide.

Als Aufpunkt der Symmetriebene dient der Mittelpunkt M Verbindungsstrecke der Aufpunkte P und Q von p und q : $M(4\,|\,2\,|\,2)$.

Als Richtungsvektoren kann der Richtungsvektor $\vec{v}$ von p und ein Vektor senkrecht zu $\vec{v}$ und senkrecht zu $\overrightarrow{PQ}$ dienen :

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Parametergleichung der Symmetrieebene E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung der Symmetrieebene :

$$\begin{vmatrix} x_1 - 4 & 2 & 3 \\ x_2 - 2 & 2 & -1 \\ x_3 - 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -5x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 18 = 0$$

Schnitt mit der Geraden g : $S\left(-2\frac{7}{8}\,|\,2\frac{5}{8}\,|\,7\right)$.

Fällt man von S das Lot auf p bzw. q dann erhält man zwei Seitenmitten des Grundflächenquadrats.

Durch Anhängen des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$ erhält man die Ortsvektoren der Eckpunkte.

Lotfußpunkt des Lotes von S auf p : $F\left(3\frac{1}{3}\,|\,-1\frac{2}{3}\,|\,3\frac{1}{6}\right)$

Eckpunkt ist dann z.B. $\left(5\frac{1}{3}\,|\,1\frac{1}{3}\,|\,5\frac{1}{6}\right)$

Kugel und Kegel

===

1. a) $r_1 = 3, r_2 = 4, \overline{M_1M_2} = \sqrt{16+16+4} = 6$

Also schneiden sich die beiden Kugeln.

b) $K_1 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 = 0 \quad K_1 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1 - 8x_2 - 4x_3 + 20 =$

Durch Subtraktion erhält man

$8x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 29 = 0$

c) Verbindungsgerade $M_1M_2 : \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der Schnittkreisebene ergibt $M\left(1\frac{11}{18} \mid 1\frac{11}{18} \mid \frac{29}{36}\right)$

Radius des Schnittkreises : $\overline{MM_1}^2 = \frac{841}{144} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{9 - \frac{841}{144}} = \sqrt{\frac{455}{144}} = \frac{1}{12}\sqrt{455}$

---

2. Die Mittelpunkte der Berührkugeln liegen auf der Geraden OP im Abstand 3 von P :

Es ist $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Also sind die Mittelpunkte der beiden Kugeln

$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{m}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

und damit sind die Gleichungen der Berührkugeln gegeben durch

$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$ bzw. $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$

---

3. Für den Mittelpunkt $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$ der Kugel muss $m_2 = m_3 = 6$ gelten.

Aus $m_1{}^2 + m_2{}^2 + m_2{}^2 = 13{,}5^2$ ergibt sich dann $m_1 = 10{,}5$.

---

4. a) Es ist $C_0\left(-3 \mid 0 \mid 3\right)$.

Parameterform E_0 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Koordinatenform : $\begin{vmatrix} x_1+3 & 7 & 5 \\ x_2 & -4 & 4 \\ x_3-3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 16x_1 + 40x_2 + 58x_3$

b) $\overrightarrow{C_0A} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{C_0A} = \sqrt{49+16+1} = \sqrt{76}$

$\overrightarrow{C_0B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{C_0A} = \sqrt{25+16+25} = \sqrt{66}$

$\overrightarrow{C_0A} \cdot \overrightarrow{C_0B} = 35 - 16 - 5 = 14 \Rightarrow \cos\gamma_0 = \dfrac{14}{\sqrt{76} \cdot \sqrt{66}} \Rightarrow \gamma_0 \approx$

c) Gleichung von g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Skalarprodukte :

$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 14 - 20 + 6 = 0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = 10 + 20 - 30 = 0 \Rightarrow g \perp E_0$

d) $\overrightarrow{C_aA} = \begin{pmatrix} 7-2a \\ -4-5a \\ 1-6a \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{C_aA} = \sqrt{65a^2 + 66}$

$$\overrightarrow{C_aB} = \begin{pmatrix} 5-2a \\ 4-5a \\ -5-6a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{C_aB} = \sqrt{65a^2+66}$$

e) C_0S ist Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks ABC_0 mit der Basis $\left[AB\right]$.

Für $a = 0$ ergibt sich die kürzeste Schenkellänge der gleichschenkligen Dreiecke.

Also steht C_0S auf g senkrecht.

---

5. a) Schnittpunkt der Geraden : $S\left(1 \mid 7 \mid 5\right)$

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{SM} = 9$

Damit ergibt sich für den Abstand des Mittelpunktes von der Schnittkreisebene :

$d = \frac{(3\sqrt{3})^2}{9} = 3$ (Kathetensatz) und für den Radius des Schnittkreises :

$r_1 = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$

b) Für das Verhältnis der Volumina gilt : $\frac{\mathfrak{V}_K}{\mathfrak{V}_Z} = \frac{\frac{4}{3}\pi\cdot(3\sqrt{3})^3}{\frac{1}{3}\pi\cdot(3\sqrt{2})^2\cdot 6} = \frac{3\sqrt{3}}{1}$
