Die Ungleichung von Tschebyschow für die Trefferanzahl X und die relative Anzahl der Treffer $H_n(X)$ bei Bernoulliketten

==

1. Ein Laplace-Tetraeder wird 100 mal geworfen.

   a) Schätzen Sie die W'keit, dass die Anzahl der geworfenen Vieren um mehr als 8 vom Erwartungswert abweicht, nach oben ab. Bestimmen Sie den genauen Wert dieser W'keit.

   b) Schätzen Sie die W'keit, dass die Anzahl der geworfenen geraden Augenzahlen um mehr als 8 vom Erwartungswert abweicht, nach oben ab. Bestimmen Sie den genauen Wert dieser W'keit.

   c) Schätzen Sie die W'keit, dass die Anzahl der geworfenen Vieren um höchstens 6 vom Erwartungswert abweicht, nach unten ab. Bestimmen Sie den genauen Wert dieser W'keit.

   d) Ermitteln Sie ein möglichst kleines, zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem mit mehr als 90% die Anzahl der geworfenen Vieren liegt ?

   Bestimmen Sie das Intervall exakt !

   e) Wie oft oft darf man das Tetraeder höchstens werfen, damit die Anzahl der geworfenen Vieren mit mindestens 50% W'keit um nicht mehr als 15 vom Erwartungswert abweicht ?

   f) Herr C bezweifelt, dass es sich um ein Laplace-Tetreader handelt. Er ist nur dann bereit, seine Zweifel aufzugeben, wenn bei 1000 Würfen die Vier mindestens 225mal und höchstens 275mal fällt.

   Schätzen Sie die W'keit, dass er seine Zweifel aufgibt, nach unten ab.

---2.

2. Ein Laplace-Tetraeder wird 200mal geworfen.

   a) Schätzen Sie die W'keit, dass die relative Häufigkeit der Vier um mehr als 0,05 von der W'keit eine Vier zu werfen abweicht, nach oben ab. Bestimmen Sie den genauen Wert dieser W'keit.

   b) Schätzen Sie die W'keit, dass die Anzahl der die relative Häufigkeit der geraden Augenzahlen um weniger als 0,05 vom Erwartungswert abweicht, nach unten ab. Bestimmen Sie den ge nauen Wert dieser W'keit.

   c) Ermitteln Sie ein möglichst kleines, zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem mit mehr als 90% W'keit die relative Häufigkeit der geworfenen Vieren liegt ?

   Bestimmen Sie das Intervall exakt !

   d) Schätzen Sie ab, wie oft man das Tetraeder mindestens werfen muss, damit die relative Häufigkeit der geworfenen Vieren mit mindestens 50% W'keit nicht mehr als 0,01 vom Erwartungswert abweicht ?

   e) Herr C bezweifelt, dass es sich um ein Laplace-Tetraeder handelt. Er ist nur dann bereit seine Zweifel aufzugeben, wenn bei 1000 Würfen die relative Häufigkeit der Vier mindestens 0,23 und höchstens 0,27 beträgt.

Schätzen Sie die W'keit, dass er seine Zweifel irrtümlich bestätigt sieht, nach oben ab.

---

3. Der Laplace-Tetraeder wird nun durch einen gleich aussehenden, aber gezinkten Tetraeder ersetzt.

a) Schätze mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow ab, wie oft muss man dieses Tetraeder mindestens werfen muss, bis die die relative Häufigkeit der Vier mit mehr als 99% W'keit um höchstens 0,05 von der unbekannten W'keit p, eine Vier zu werfen, abweicht ?

b) Das Tetraeder wird 500mal geworfen und die Vier tritt mit einer relativen Häufigkeit von $h_{500} = 0{,}4$ auf.

Ermitteln S mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow ein möglichst kleines Intervall, in mit mindestens 90% W'keit die unbekannte W'keit p liegt.

Bestimmen Sie dieses sog. **Konfidenzintervall**

i) grob mit der Abschätzung $\mathrm{Var}\left[H_{500}(X)\right] \leq \frac{1}{4\cdot 500}$

ii) genauer mit der Näherung $\mathrm{Var}\left[H_{500}(X)\right] \approx \frac{h_{500}\cdot(1-h_{500})}{500}$

---

4. In einer Lieferung von 10000 Transistoren ist ein unbekannter Anteil p defekt.

Wie viele Transistoren muss man mindestens testen, um die Gesamtzahl defekter Transistoren in der Lieferung mit einer W'keit von 80% bis auf ± 500 vorhersagen zu können.

Lösung

===1.a)

1. a) ***Benötigte Ungleichung und Werte :***

$$P\left(\left|X-E(X)\right| > \varepsilon\right) < \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

mit $E(X) = n\cdot p = 100\cdot\frac{1}{4} = 25$, $\mathrm{Var}(X) = npq = 100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{675}{4}$ und $\varepsilon = 8$

bzw. $P\left(\left|X-E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$ (erlaubt eine bessere Abschätzung)

mit $E(X) = n\cdot p = 100\cdot\frac{1}{4} = 25$, $\mathrm{Var}(X) = npq = 100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{675}{4}$ und $\varepsilon = 9$

Eingesetzt ergibt sich

$$P\left(\left|X-25\right|>8\right) < \frac{100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{8^2} \approx 29{,}3\%$$

bzw.

$$P\left(\left|X-25\right|\geq 9\right) \leq \frac{100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{9^2} \approx 23{,}2\%$$

Korrekter Wert :

$$P\left(\left|X-E(X)\right|>\varepsilon\right) = P\left(\left|X-25\right|>8\right) = P(X>33)+P(X<17) =$$

$$= 1-F_{0,05}^{100}(33)+F_{0,25}^{100}(16) = 4{,}9\%$$

---

b) ***Benötigte Ungleichung und Werte :***

$$P\left(\left|X-E(X)\right|>\varepsilon\right) < \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

mit $E(X) = n\cdot p = 100\cdot\frac{1}{2} = 50$, $\mathrm{Var}(X) = npq = 100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 25$ und $\varepsilon = 8$

bzw. $P\left(\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$ (erlaubt eine bessere Abschätzung)

mit $E(X) = n\cdot p = 100\cdot\frac{1}{2} = 50$, $\mathrm{Var}(X) = npq = 100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 25$ und $\varepsilon = 9$

Eingesetzt ergibt sich

$$P\left(\left|X-25\right|>8\right) < \frac{100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{8^2} \approx 39{,}1\% \text{ bzw. } P\left(\left|X-25\right|\geq 9\right) \leq \frac{100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{9^2} \approx 30{,}9\%$$

Korrekter Wert :

$$P\left(\left|X-E(X)\right|>\varepsilon\right) = P\left(\left|X-50\right|>8\right) = P(X>58)+P(X<42\,) =$$

$$= 1-F_{0,5}^{100}(58)+F_{0,5}^{100}(41) \approx 8{,}9\%$$

c) ***Benötigte Ungleichung und Werte :***

$$P\left(\left|X-E(X)\right|\leq\varepsilon\right) > 1-\frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

mit $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25$, $Var(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{4}$ und $\varepsilon = 6$

bzw. $P\left(|X - E(X)| < \varepsilon \right) > 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

mit $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25$, $Var(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{4}$ und $\varepsilon = 7$

Eingesetzt ergibt sich

$P\left(|X - 25| \le 6 \right) > 1 - \frac{\frac{75}{4}}{6^2} \approx 47{,}9\%$ bzw. $P\left(|X - 25| < 7 \right) > 1 - \frac{\frac{75}{4}}{7^2} \approx 61{,}7\%\%$

Korrekter Wert : $= F_{0,25}^{100}(31) - F_{0,2}^{100}(18) \approx 86{,}8\%$

---

d) ***Benötigte Ungleichung und Werte :***

$P\left(|X - E(X)| \le \varepsilon \right) > 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

mit $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25$, $Var(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{4}$

$P\left(\left| X - 25 \right| \le \varepsilon \right) > 1 - \frac{\frac{75}{4}}{\varepsilon^2} > 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 > \frac{\frac{75}{4}}{0{,}1} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \ge 14$

$I = \left[11; 39 \right]$

Exakte Bestimmung :

$F_{0,25}^{100}(25 + k) - F_{0,25}^{100}(25 - k - 1) > 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad k = 12$ und damit $I = \left[13; 37 \right]$

---

e) $P\left(\left| X - E(X) \right| \le \varepsilon \right) > 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2} \ge 0{,}50 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{15^2} \ge 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad n \le 600$

Man darf den Tetraeder-Würfel also höchstens 600mal werfen.

---

f) $I = \left[250 - 25; 250 + 25 \right] \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 25$

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{1000 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{25^2} = 70\%$$

Die W'keit, dass Herr C seine Zweifel aufgibt, beträgt mindestens 70%.

---

2. a) Benötigte Ungleichung und Werte :

$$P\left(\left|H_n(X) - p\right| > \varepsilon\right) < \frac{Var\left[H_n(X)\right]}{\varepsilon^2}$$

mit $n = 200,\ E\left[H_n(X)\right] = p = \frac{1}{4},\ Var\left[H_n(X)\right] = \frac{pq}{n} = \frac{3}{3200}$ und $\varepsilon = 0{,}05$

$$P\left(\left|H_{200}(X) - \frac{1}{4}\right| > 0{,}05\right) < \frac{\frac{3}{3200}}{0{,}05^2} = 37{,}5\%$$

Exakter Wert :

Eine Abweichung der relativen Häufigkeit von 0,05 vom Ewartungswert bedeutet eine Abweichung von $200 \cdot 0{,}05 = 10$ der absoluten Häufigkeit vom Ewartungswert.

$$P\left(\left|x - 50\right| > 10\right) = P(X > 60) + P(X < 40) =$$

$$= 1 - F_{0,25}^{200}(60) + F_{0,25}^{200}(39) \approx 8{,}6\%$$

---

b) $P\left(\left|H_{200} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}05\right) \ge 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{200 \cdot 0{,}05^2} = 50\%$

ExakterWert : $P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| < 10\right) = P(91 \le X \le 109) = F_{0,5}^{200}(109) - F_{0,5}^{200}(90) \approx 82{,}1\%$

---

c) $P\left(\left|H_n(X) - p\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{Var\left[H_n(X)\right]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{200 \cdot \varepsilon^2} > 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \ge 0{,}1$

$I = \left[0{,}15;\ 0{,}35\right]$

Genauer Wert :

$F_{0,25}^{200}(50 + k) - F_{0,25}^{200}(50 - k - 1) > 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad k = 10 \quad I = \left[0{,}20;\ 0{,}30\right]$

---

d) $P\left(\,|H_n(X)-p| \le \varepsilon\right) > 1-\frac{Var\left[H_n(X)\right]}{\varepsilon^2} = 1-\frac{pq}{n\cdot\varepsilon^2} = 1-\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{n\cdot 0{,}01^2} \ge 0{,}50 \Rightarrow \quad n \ge 600$

Man muss den Tetraeder-Würfel mindestens 600mal werfen.

---

e) $P\left(\,|H_n(X)-p| > \varepsilon\right) < \frac{Var\left[H_n(X)\right]}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\cdot\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{1000\cdot 0{,}02^2} = 46{,}875\%$

---

3. a) $P\left(\,|H_n(X)-p| \le \varepsilon\right) > 1-\frac{Var\left[H_n(X)\right]}{\varepsilon^2} = 1-\frac{pq}{n\cdot\varepsilon^2} = 1-\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{n\cdot 0{,}05^2} > 0{,}99$

$0{,}01 > \frac{0{,}25}{n\cdot 0{,}0025} \quad \Rightarrow \quad n > 10000$

Man muss das Tetraeder mindestens 10001mal werfen.

---

b) i) $P\left(\,|H_n(X)-p| \le \varepsilon\right) > 1-\frac{Var\left[H_n(X)\right]}{\varepsilon^2} = 1-\frac{pq}{n\cdot\varepsilon^2} = 1-\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{500\cdot\varepsilon^2} > 0{,}90$

$1-\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{500\cdot\varepsilon^2} \ge 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2000\cdot\varepsilon^2} \le 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \ge 0{,}224$

Mit mindestens 90% W'keit liegt die unbekannte W'keit im Intervall

ii) $\left[0{,}4-0{,}224;\ 0{,}4+0{,}224\right] = \left[0{,}176;\ 0{,}624\right]$

$P\left(\,|H_n(X)-p| \le \varepsilon\right) > 1-\frac{Var\left[H_n(X)\right]}{\varepsilon^2} = 1-\frac{pq}{n\cdot\varepsilon^2} = 1-\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{500\cdot\varepsilon^2} \ge 0{,}90$

$1-\frac{0{,}24}{500\cdot\varepsilon^2} \ge 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}00048}{\varepsilon^2} \le 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \ge 0{,}219$

Mit mindestens 90% W'keit liegt die unbekannte W'keit im Intervall

$\left[0{,}4-0{,}219;\ 0{,}4+0{,}219\right] = \left[0{,}181;\ 0619\right]$

---

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie relative Häufigkeit defekter Transistoren um höchstens

$\frac{500}{10000} = 0{,}05$ von der unbkannten Wahrscheinlichkeit p abweicht, muss mindestens 80% sein.

$$P\left(|H_n(X) - p| \le \varepsilon \right) > 1 - \frac{\mathrm{Var}\left[H_n(X)\right]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n \cdot \varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n \cdot 0{,}05^2} \ge 0{,}80$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}2 \ge \frac{0{,}25}{n \cdot 0{,}0025} \quad \Rightarrow \quad n \ge 500$$
