Kurvendiskussion

==

1. Definitionsmenge

Die Definitionsmenge einer Funktion ist die Menge der Zahlen, denen durch die Funktion ein Wert zugeordnet werden kann.

---

2. Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion f sind alle $x \in D$, für die $f(x) = 0$ gilt.

---

3. Symmetrie

Der Graph einer Funktion f ist symmetrisch zur y-Ache, wenn $\boxed{f(-x) = f(x)}$ gilt.

Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zu $O\left(0; 0\right)$, wenn $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ gilt.

---

4. Grenzwertverhalten

Folgende Grenzwerte sind gegebenenfalls zu untersuchen

a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ oder $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ (rechtseitiger Grenzwert) oder $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ (linksseitiger Grenzwert)

Eine Funktion f heißt in $x_0 \in D$ stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$

---

5. Monotonie

Eine Funktion heißt in ihrem Definitionsbereich D streng monoton zunehmend, wenn

für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ folgt.

Für eine auf dem Intervall $I = [a; b]$ stetige und auf $I_0 =]a;b[$ differenzierbare Funktion f gilt

$$\boxed{f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in I_0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist in I streng monoton zunehmend}}$$

Eine Funktion heißt in ihrem Definitionsbereich D streng monoton abnehmend, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) > f(x_2)$ folgt.

Für eine auf dem Intervall $I = [a; b]$ stetige und auf $I_0 =]a;b[$ differenzierbare Funktion f gilt

$$\boxed{f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in I_0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist in I streng monoton abnehmend}}$$

Beachte :

Die letzten beiden Sätze gelten nur für Intervalle.

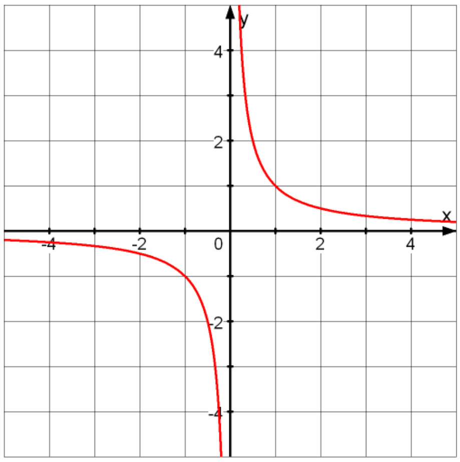
Für die Funktion $f : x \to \frac{1}{x^2}$

mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

auf D, aber f ist auf D nicht monoton abnehmend,

$-1 <$, aber^$f(-1) < f(1)$.



----

6. Extremwerte : Hoch- und Tiefpunkte

Ein Punkt $E\left(x_0; f(x_0)\right)$ heißt Hochpunkt des Graphen von f, wenn es ein offenes Intervall I_0

gibt, so dass $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in I_0 \cap D$ ist.

Ein Punkt $P\left(x_0; f(x_0)\right)$ heißt Tiefpunkt des Graphen von f, wenn es ein offenes Intervall I_0

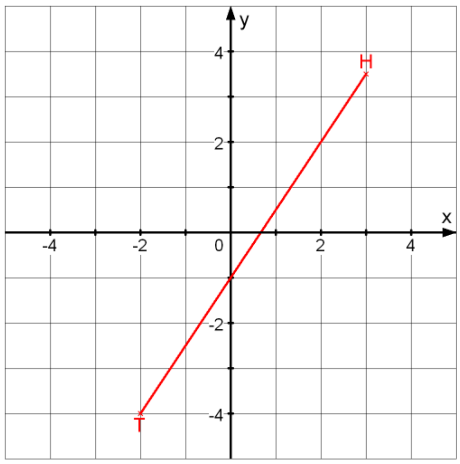
gibt, so dass $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in I_0 \cap D$ ist.

Beispiele :

Die Punkte $T\left(-2;\ -4\right)$ und $H\left(3;\ \frac{7}{2}\right)$ sind Tief- bzw. Hochpunkt des Graphen der Funktion

$f: x \to \frac{3}{2}x - 1$ mit $D = [-2;\ 3]$.

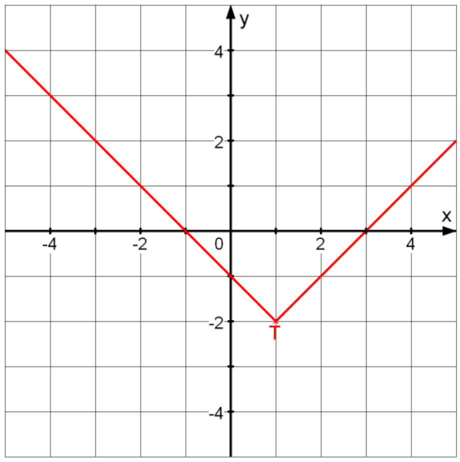
Man spricht von Randextrema.



Der Punkt $T\left(1;\ -2\right)$ ist Tiefpunkt des Graphen der Funktion

$f: x \to \left| x - 1 \right| - 2$ mit $D = \mathbb{R}$.

f ist in $x = 1$ nicht differenzierbar.



Für eine auf einem offenen Intervall I_0 definierte und differenzierbare Funktion f gilt

a) Ist $f'(x_0) = 0$ und ändert f in x_0 sein Monotonieverhalten, dann ist $E\left(x_0;\ f(x_0)\right)$ Hoch- oder Tiefpunkt des Graphen von f.

b) Ist $f'(x_0) = 0$ und ändert f in x_0 sein Monotonieverhalten nicht , dann ist $E\left(x_0;\ f(x_0)\right)$ Terrassenpunkt des Graphen von f.

---

7. Krümmungsverhalten und Wendepunkte

Für eine auf dem Intervall $I = [a;\ b]$ stetige und auf $I_0 =]a;b[$ zweimal differenzierbare Funktion f gilt

$$\boxed{f''(x) > 0 \text{ für alle } x \in I_0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist auf I linksgekrümmt}}$$

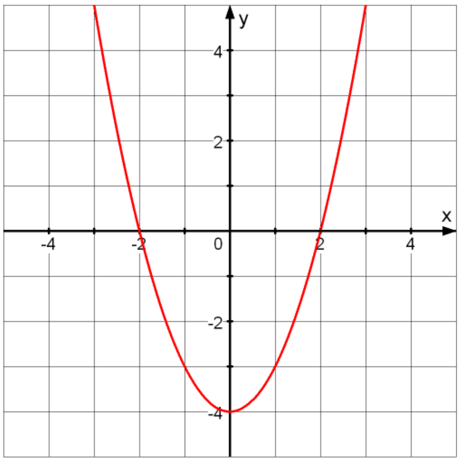
Für eine auf dem Intervall $I = [a;\ b]$ stetige und $I_0 =]a;b[$ zweimal differenzierbare Funktion f gilt

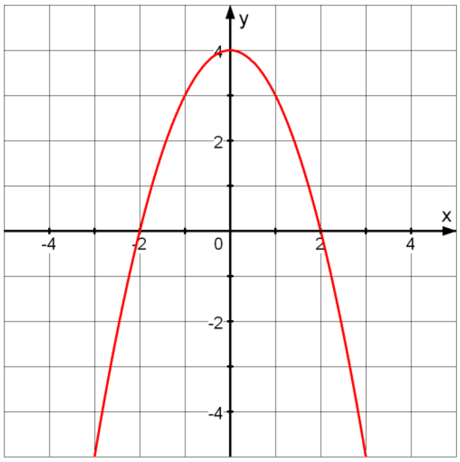
$$\boxed{f''(x) < 0 \text{ für alle } x \in I_0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist auf I rechtsgekrümmt}}$$

Ist die Funktion f auf dem offenen Intervall $I_0 =]a; b[$ definiert und ist $x_0 \in I_0$, dann heißt $W\left(x_0; f(x_0)\right)$ ein Wendepunkt des Graphen von f, wenn gilt

a) f ist auf $]a; x_0[$ rechtsgekrümmt und auf $]x_0; b[$ linksgekrümmt.

Beispiele :





oder

b) f ist auf $]a; x_0[$ linksgekrümmt und auf $]x_0; b[$ rechtsgekrümmt.

Für eine auf einem offenen Intervall I_0 definierte und zweimal differenzierbare Funktion f gilt

Ist $f''(x_0) = 0$ und ändert f in x_0 sein Krümmungsverhalten, dann ist $W\left(x_0; f(x_0)\right)$ ein Wendepunkt des Graphen von f.

Für eine auf einem offenen Intervall I_0 definierte und zweimal differenzierbare Funktion f gilt

Ist $f''(x_0) = 0$ und ändert f in x_0 sein Krümmungsverhalten, dann ist $W\left(x_0; f(x_0)\right)$ ein Wendepunkt des Graphen von f.

Für eine auf einem offenen Intervall I_0 definierte und zweimal differenzierbare Funktion f gilt

a) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann ist $E\left(x_0; f(x_0)\right)$ ein Hochpunkt des Graphen von f.

b) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann ist $E\left(x_0; f(x_0)\right)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f.

---

8. Tangenten

Die Gleichung einer Tangente im $P\left(x_0; f(x_0)\right)$ lautet

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$
