Kombinatorik

===

Produktregel (Zählprinzip) :

$$\boxed{\left|A \times B\right| = \left|A\right| \cdot \left|B\right|} \text{ bzw. } \boxed{\left|A^2\right| = \left|A\right|^2}$$

Additionsregel (Regel vom Ein- und Ausschluß) :

$$\boxed{\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|}$$

Beispiele :

a) Aus einer Gruppe von 8 Männern und 9 Frauen werden ein Mann **und** eine Frau ausgewählt.

Dann gibt es $8 \cdot 9 = 72$ verschiedene Auswahlmöglichkeiten.

b) Zwei Würfel werden geworfen.

Dann gibt es $6^2 = 36$ verschiedene Ergebnisse.

(1|1)	(1|2)	(1|3)	(1|4)	(1|5)	(1|6)
(2|1)	(2|2)	(2|3)	(2|4)	(2|5)	(2|6)
(3|1)	(3|2)	(3|3)	(3|4)	(3|5)	(3|6)
(4|1)	(4|2)	(4|3)	(4|4)	(4|5)	(4|6)
(5|1)	(5|2)	(5|3)	(5|4)	(5|5)	(5|6)
(6|1)	(6|2)	(6|3)	(6|4)	(6|5)	(6|6)

c) Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 20 Fragen mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten zur Auswahl.

Dann gibt es $4^{20} = 1099511627776$ verschiedene Möglichkeiten der Beantwortung.

d) Es gibt $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ verschiedene dreistellige Zahlen.

Beachte : Die erste Ziffer kann keine 0 sein !

$V_{mW}(n, k) = n^k$	Anzahl der k-Tupel einer n-elementigen Menge mit Wiederholung - mehrmaliges Werfen eines Würfels - gleichzeitiges Werfen mehrerer Würfel - Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen - Mutiple-Choice
$V_{oW}(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	Anzahl der k-Tupel einer n-elementigen Menge ohne Wiederholung - Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen
$P_{oW}(n) = n!$	Anzahl der Permutationen der Elemente einer n-elementigen Menge - Anordnung aller Elemente einer Menge in einer Reihe
$K_{oW}(n, k)$	Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge - gleichzeitiges Ziehen aus einer Urne - Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge, bei der ein Element höchstens einmal gewählt werden darf
$P(n; n_1, n_2, \ldots., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots. \cdot n_k!}$ $n = n_1 + n_2 + \ldots. + n_k$	Anzahl der Permutationen von n Elementen einer Menge mit Wiederholung - Anordungen der Elemente einer Menge in einer Reihe, bei der die Elemente mehrmals verwendet werden dürfen (MISSISSIPPI)
$k_{mW} = \binom{n-1+k}{k}$	Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von k Elementen aus einer n-elementigen Menge, wobei ein Element mehrmals ausgewählt werden darf - Wurfbilder

1. Die Buchstaben des Wortes ABEL lassen sich auf $4! = 24$ verschiedene Arten in einer Reihe anordnen.

Die Anordnungen sind

ABEL	ABLE	AEBL	AELB	ALBE	ALEB
BAEL	BALE	BEAL	BELA	BLAE	BLEA
EABL	EALB	EBAL	EBLA	ELAB	ELNA
LABE	LAEB	LBAE	LBEA	LEAB	LENA

---

2. Ein Bücheregal enthält 4 Informatik-, 6 Physik- und 7 Mathematikbücher.

i) Auf wie viele Arten lassen sich die Bücher im Regal anordnen ?

b) Bei wie vielen dieser Anordnungen stehen die Bücher eines Fachgebiets nebeneinander?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es die Bücher so anzuordnen, dass die Mathematikbücher nebeneinander stehen ?

d) Bei wie vielen Anordnungen stehen keine zwei Informatikbücher nebeneinander ?

Lösung :

a) $(4+6+7)! = 355\ 687\ 428\ 096\ 000$

b) $4! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 3! = 522\ 547\ 200$

c) $(4+6+1)! \cdot 7! = 201\ 180\ 672\ 000$

d) $(6+7)! \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 149\ 597\ 947\ 699\ 200$

---

3. Wie viele verschiedene Anordnungen der Buchstaben des Wortes EUROPA gibt es,

a) die mit dem Buchstaben E beginnen oder aufhören ?

b) bei denen die Konsonanten nicht nebeneinander stehen ?

c) bei denen die Vokale nebeneinander stehen ?

d) bei denen das E neben dem U steht ?

Lösung :

a) $5! + 5! = 240$

b) $4! \cdot \binom{5}{2} \cdot 2! = 480$ oder $4! \cdot 5 \cdot 4 = 480$ oder $6! - 5! \cdot 2! = 480$

c) $3! \cdot 4! = 144$ d) $5! \cdot 2! = 240$

4. Wie viele verschiedene Anordnungen der Buchstaben des Wortes OTTOMOTOR, in denen die Buchstabenfolge OTTO vorkommt, gibt es ?

Lösung : $\frac{6!}{2!} = 360$

---

5. Die zweielemtigen Teilmengen der Menge $\{a, b, c, d\}$ sind die Mengen

$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ und $\{c, d\}$

---

6. Aus einer Gruppe von 10 Leuten gibt es $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$ Möglichkeiten vier Leute für einen Ausschuss auszuwählen.

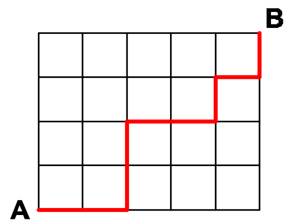
---

7. Aus einer Gruppe von 4 Frauen und 6 Männern lassen sich auf $\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{2} = 90$ Arten zwei Frauen und 2 Männer auswählen.

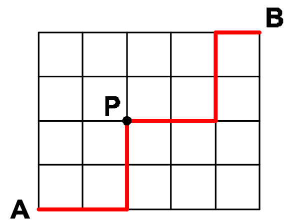
---

8. Gitterwege

a) Wie viele verschiedene kürzeste Gitterwege von A nach B gibt es ?



b) Wie viele verschiedene kürzeste Gitterwege von A nach B durch P gibt es ?



Lösung :

a) Ein Weg besteht aus 5 Bewegungsschritten nach rechts und 4 Bewegungsschritten nach oben.

Daher gibt es $\frac{(5+4)!}{4!\cdot 5!} = 126$ verschiedene Gitterwege.

b) Es gibt $\frac{(2+2)!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{(3+2)!}{3!\cdot 2!} = 60$ verschiedene Gitterwege.

---

9. Zahlen

In wie vielen fünfstelligen Zahlen kommt

a) die Ziffer 9 nicht vor ?

b) die Ziffer 9 mindestens einmal vor ?

c) die Ziffer 9 genau zweimal vor ?

d) weder die Ziffer 1 noch die Ziffer 9 vor ?

e) die Ziffer 1 oder die Ziffer 9 vor ?

f) die Ziffer 1 und die Ziffer 9 vor ?

Lösung :

a) $8 \cdot 9^4 = 52488$ b) $9 \cdot 10^4 - 52488 = 37512$

c) $\binom{4}{1} \cdot 9^3 + 8 \cdot \binom{4}{2} \cdot 9^2 = 30132$ d) $7 \cdot 8^4 = 28672$

e) $90000 - 7 \cdot 8^4 = 61328$ f) $(9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4) \cdot 2 - 61328 = 13696$

---

10. Ein Laplace-Tetraederwürfel wird 8mal geworfen.

A : Jede Augenzahl tritt zweimal auf

B : Keine Augenzahl tritt zweimal hintereinander auf

C : Es wird keine 4 gewürfelt

D : Die kleinste gewürfelte Augenzahl ist die 2

E : Man würfelt eine Augenzahl genau fünfmal

F : Man würfelt genau viermal die 1 oder genau viermal die 4

G : Man würfelt zwei Augenzahlen genau dreimal

Lösungen :

$$\left| \Omega \right| = 4^8 = 65536$$

$$\left| A \right| = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 2520$$

$$\left| B \right| = 4 \cdot 3^7 = 8748$$

$$\left| C \right| = 3^8 = 6561$$

$$\left| D \right| = 3^8 - 2^8 = 6305$$

$$\left| E \right| = \binom{4}{1} \cdot \binom{8}{5} \cdot 3^3 = 6048$$

$$\left| F \right| = \binom{8}{4} \cdot 3^4 + \binom{8}{4} \cdot 3^4 - \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 11270$$

$$\left| G \right| = \binom{4}{2} \cdot \frac{8!}{3!3!} + \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \frac{8!}{3!3!2!} = 6720 + 6720 = 13440$$
