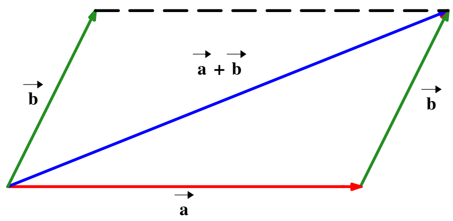
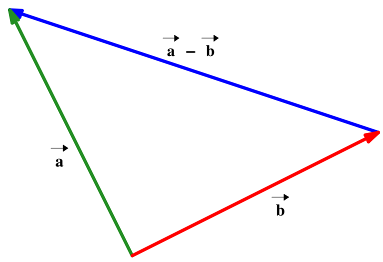
I. Rechnen mit Vektoren

• **Addition** $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$



• **Subtraktion** $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$



• **Skalarmultiplikation**

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

• **Skalarprodukt**

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in kartesischen Koordinanten ist gegeben durch

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_3} \end{pmatrix} = \mathbf{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}}$$

Anwendungen :

- Der Betrag eines Vektors

Der Betrag eines geometrischen Vektors ist die Länge eines seiner Repräsentanten.

In kartesischen Koordinaten ist der Betrag $a = |\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a}$ gegeben durch

$$\boxed{|\vec{a}| = a = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

- Einheitsvektoren

Hat ein Vektor $\vec{a}$ die Länge die Länge a,

dann hat der Vektor $\vec{a_0} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$ die Länge 1. Der Vektor $\lambda \cdot \vec{a_0}$ hat dann die Länge $|\lambda|$

- Winkel zwischen zwei Vektoren

Für den Winkel α, den die Repräsentanten zweier Vektoren $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ mit gemeinsamen Anfangspunkt einschließen, gilt

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}}$$

Dabei ist $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ und $b = |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

Sonderfall : Orthogonale (zeinander zueinder senkrechte Vektoren)

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

- **Vektorprodukt**

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in kartesischen Koordinanten ist der Vektor

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht.

Anwendungen :

- Flächeninhalt eines Parallelogramms

Der Betrag des Vektorprodukts zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich dem Inhalt des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.

$$\boxed{\mathfrak{A} = |\vec{a} \times \vec{b}|}$$

- Flächeninhalt eines Dreiecks

Für den Flächeninhalt eines von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks gilt

$$\boxed{\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|}$$

- Abstand eines Punktes von einer Geraden

Für den Abstand eines Punktes P von der Geraden g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ gilt

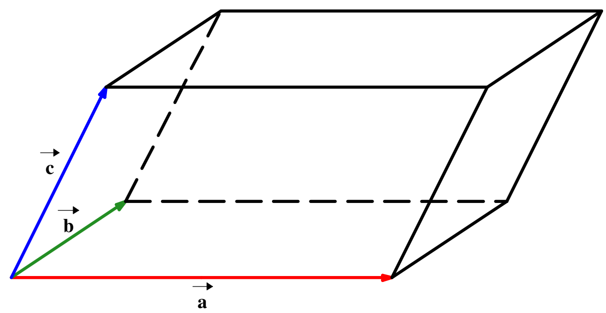
$$\boxed{d(P; g) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}} \text{ mit } \overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$$

• Spatprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Anwendungen :

- Volumen eines Spats



Der Betrag des Spatprodukts dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist gleich dem Volumen des von ihnen aufgesannten Spats

$$\boxed{\mathfrak{V} = \left| \, |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| \, \right|}$$

- Volumen eines Tetraeders

Für den Rauminhalt eines von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Tetraeders gilt

- Abstand eines Punktes von einer Ebene

Für den Abstand eines Punktes P von der Ebene E : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}$ gilt

$$\boxed{\mathbf{d(P;\,E)} = \frac{\left|(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{AP}}\right|}{\left|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}\right|} = \frac{\left|\,\left|\vec{\mathbf{v}}\,, \vec{\mathbf{u}}\,, \overrightarrow{\mathbf{AP}}\right|\,\right|}{\left|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}\right|}} \text{ mit } \overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$$

- Abstand windschiefer Geraden

Für den Abstand zweier windschiefer Geraden

$g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ und $h : \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{u}$

gilt

$$\boxed{\mathbf{d(P;\,E)} = \frac{\left|(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|}{\left|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}\right|} = \frac{\left|\,\left|\vec{\mathbf{v}}\,, \vec{\mathbf{u}}\,, \overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|\,\right|}{\left|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}\right|}} \text{ mit } \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

II. Vektoren und Punkte

===

- **Verbindungsvektor**

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Ortvektoren, dann ist $\vec{b} - \vec{a}$ der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ von A und B.

- **Teilverhältnis**

Liegt der Punkt T auf der Geraden durch die Punkte A und B und ist T ≠ B, dann gibt es ein $\tau \in \mathbb{R}$, so dass

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{AT}} = \tau \cdot \overrightarrow{\mathbf{TB}}}$$

ist.

τ bezeichnet man als das Teilverhälnis, in dem T die Strecke $\left[AB\right]$ teilt.

Man unterscheidet zwischen innerer Teilung ($\tau > 0$) und äußerer Teilung ($\tau < 0$).

Anwendungen :

- Ortsvektor des Mittelpunkts einer Strecke $\left[AB\right]$

$$\boxed{\vec{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}\right)}$$

- Ortsvektor des Schwerpunkts eines Dreiecks ABC

$$\boxed{\vec{\mathbf{s}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}\right)}$$

III. Geraden

==

• Parametergleichung einer Geraden

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}}$$

- Bestimmung der Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen (Spurpunkte)

Ebene	Bedingung
x_1x_2-Koordinatenachse	$x_3 = 0$
x_1x_3-Koordinatenachse	$x_2 = 0$
x_2x_3-Koordinatenachse	$x_1 = 0$

- Sind $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{u}$ die Parametergleichungen zweier Geraden, dann gilt

$g \parallel h$	$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind kollinear
g und h sind windschief	$\left\{\vec{b} - \vec{a}, \vec{v}, \vec{u}\right\}$ ist linear unabhängig
Schnittpunktsbedingung	$\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{u} =$

IV. Ebenen

===

• Parametergleichung einer Ebene

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}}$$

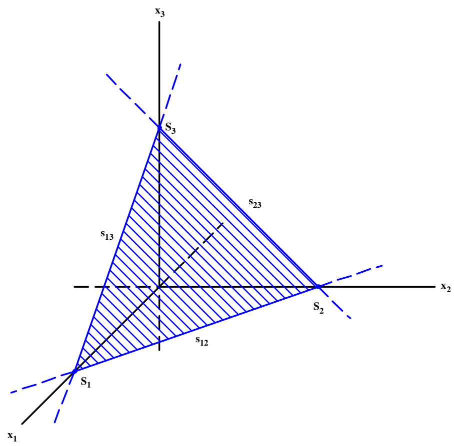
Anwendungen :

- Schnittpunkte mit den Kordinatenachsen

Achse	Bedingung
x_1-Koordinatenachse	$x_2 = x_3 = 0$
x_2-Koordinatenachse	$x_1 = x_3 = 0$
x_3-Koordinatenachse	$x_1 = x_2 = 0$

- Bestimmung der Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen (Spurgeraden)

Ebene	Bedingung
x_1x_2-Koordinatenachse	$x_3 = 0$
x_1x_3-Koordinatenachse	$x_2 = 0$
x_2x_3-Koordinatenachse	$x_1 = 0$



- Geraden, parallel zu einer Ebene

Eine Gerade g : $\vec{x} = \vec{b} + \sigma \cdot \vec{w}$ ist genau dann parallel zur Ebene

E : $\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}}$,

wenn die Vektoren $\left\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right\}$ linear abhängig (komplanar) sind.

Liegt darüberhinaus der Aufpunkt von g in E, dann liegt g in E.

- **Drei-Punkte-Form einer Ebenengleichung**

Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren dreier Punkte A, B und C,

die nicht auf einer Geraden liegen,

dann wir durch sie eindeutig eine Ebene E festgelegt.

Eine Parametergleichung dieser Ebene ist dann

$$\boxed{\mathbf{E : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}}}$$

- **Kordinatenform einer Ebenengleichung**

Ein Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{\mathbf{x}}$ liegt genau dann auf einer Ebene E mit der Parameter-gleichung

$E : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}$,

wenn die

die Vektoren $\vec{x} - \vec{a}$, $\vec{v}$ und $\vec{u}$ linear abhängig (komplanar) sind. Es ist dann

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_1 & u_2 \\ x_2 - a_1 & v_2 & u_2 \\ x_3 - a_1 & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die sich ergebene Gleichung in den drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3 hat dann die Form

$$\boxed{\mathbf{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 = 0}}$$

und heißt Koordinatenform der Ebenengleichung.

Ein Punkt $P\left(p_1 \middle| p_2 \middle| p_3\right)$ liegt genau in der Ebene, wenn $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 = 0$ ist.

Anwendungen :

- Schnitt von Geraden und Ebenen

- **Achsenabschnittsform einer Ebenengleichung**

Ist eine Ebene zu keiner Koordinatenachse parallelund geht sie nicht durch den Koordinatenursprung und , dann besitzt sie eine Koordinatengleichung der Form

$$\boxed{\mathbf{\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 0}}$$

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind dann

$S_{x_1}\left(a \,\middle|\, 0 \,\middle|\, 0\right)$, $S_{x_2}\left(0 \,\middle|\, b \,\middle|\, 0\right)$ und $S_{x_3}\left(0 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, c\right)$.

Man nennt daher die obige Gleichung die Achsenbschnittsform einer Ebenengleichung.------

----

- **Normalenformform einer Ebenengleichung**

Ist A mit dem Ortsveltor $\vec{a}$ Punkt einer Ebene E und A $\vec{n}$ ein Vektor senkrecht zu E,

dann liegt der Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ genau dann in der Ebene, wenn

$$\boxed{\mathbf{\vec{n} \cdot \left[\vec{x} - \vec{a}\right] = 0}}$$

Verwendet man Koordinaten, dann ergibt sich

$$\boxed{\mathbf{\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \overbrace{(-n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3)}^{n_4} = 0}}$$

Man nennt diese Gleichung die Normalenform einer Ebenengleichung.

Anwendungen :

Sind $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$ und $F: m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4 = 0$ zwei Ebenen mit

den Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ eine Gerade

$E \parallel F$	$\vec{n}$ und $\vec{m}$ sind kollinear
Schnittwinkel α von E und F	$\cos\alpha = \left\| \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{m}\|} \right\|$
$E \perp F$	$\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$
$g \parallel E$	$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$
$g \perp E$	$\vec{v}$ und $\vec{n}$ sind kollinear
Neigungswinkel α von g gegen E	$\sin\alpha = \left\| \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{n}\|} \right\|$

Anwendungen :

- Orthogonale Symmetrieebene einer Strecke

Die Punkte des Raumes, die von zwei gegebenen Punkten A und B gleich weit entfernt sind, bilden eine Ebene, welche die Strecke $[AB]$ orthogonal halbiert.

Ist $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ der

- **Hesseform einer Ebenengleichung**

Ist $\vec{n_0}$ der zu einer Ebene gehörende Einheitsnormalenvektor, der vom Ursprung des Koordinatensystem wegweist und $\vec{a}$ der Ortsvektor eines Punktes A in der Ebene, dann heißt

$$\vec{n_0} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

die Hessesche Normalenform der Ebene.

Ist

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$$

eine Normalenform der Ebene, dann ergibt sich daraus als Hesseform

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4}{-\operatorname{sgn}(n_4)\cdot\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

Setzt man den Ortsvektor $\vec{p}$ eines Punktes P in diue Hesseform einer Ebene E ein, dann ergibt sich eine Zahl, deren Betrag gleich dem Abstand des Punktes P von der Evbene ist.

Diese Zahl ist positiv, wenn P au der ursprungsfernen Seite der Ebene ist, sie ist negativ wenn P auf der ursprungsnahen Seite der Ebene ist.

Punktmengen die durch Abstände beschrieben werden und daher durch Hesseformen beschrieben werden können :

- die Mittenebene zweier paralleler Ebenen ist die Menge aller Punkte, die von den beiden Ebenen konstanten Abstand haben

- die winkelbierenden Ebenen zu zwei sich schneidenden Ebenen bilden die Menge aller Punkte die von diesen Ebenen gleichen Abstand haben

- die Ebenen deren Punkte von einer gegebenen Ebene konstanten Abstand haben

etc.

V. Kugel

==

Ein Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ liegt genau dann auf der Kugel K(M; r) um den Mittelpunkt M mit Radius r, wenn

$$\boxed{\mathbf{(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2}}$$

ist.

$\vec{m}$ ist dabei der Ortsvektor des Mittelpunks M.

Es gilt

- Eine Gerade ist Tangente an die Kugel K(M; r), wenn ihr Abstand von M gleich r ist.

- Berührt eine Gerade

  $g: \vec{x} = \vec{b} + \sigma \cdot \vec{w}$

  eine Kugel K(M; r) im Punkt B, dann gilt

  $\overrightarrow{MB} \perp \vec{w}$.

- Eine Ebene ist Tangentialebene an eine Kugel K(M; r), wenn ihr Abstand von M gleich r ist.

- Berührt eine Ebene E eine Kugel im Punkt B, dann istr der Vektor $\overrightarrow{BM} = \vec{m} - \vec{b}$ ein Normalenvektor der Ebene d.h.

$$(\vec{b} - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

  ist eine Normalenform derTangentialebene E.

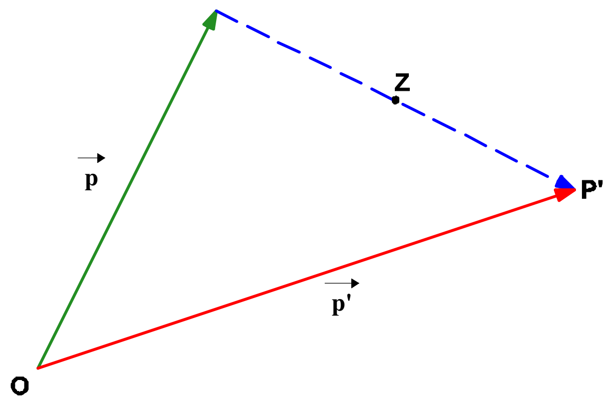
- Ist der Abstand d einer Ebene E vom Miitelpunkt M einer Kugel kleiner als der Radius, dann schneidet E die Kugel in einem Kreis mit Radius r_1. Es ist

$$\boxed{\mathbf{r^2 = d^2 + r_1^2}}$$

VI. Spezialaufgaben

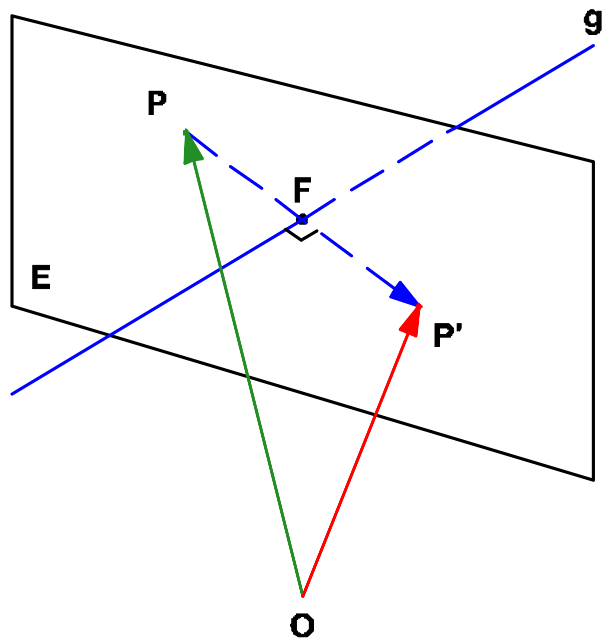
==

• Punktspiegelung am Zentrum Z



$$\boxed{\vec{p'} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PZ}}$$

• Spiegelung an einer Geraden g

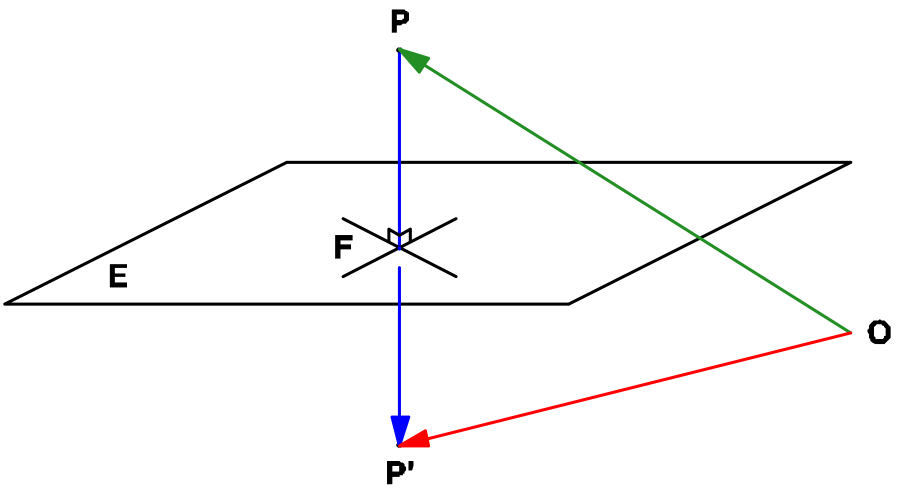


Ist F der Fußpunkt des Lotes von P auf g, dann gilt

$$\boxed{\vec{p'} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}}$$

Der Punkt P, der Lotfußpunkt F und der Bildpunkt P' liegen in einer Ebene E senkrecht zu g.

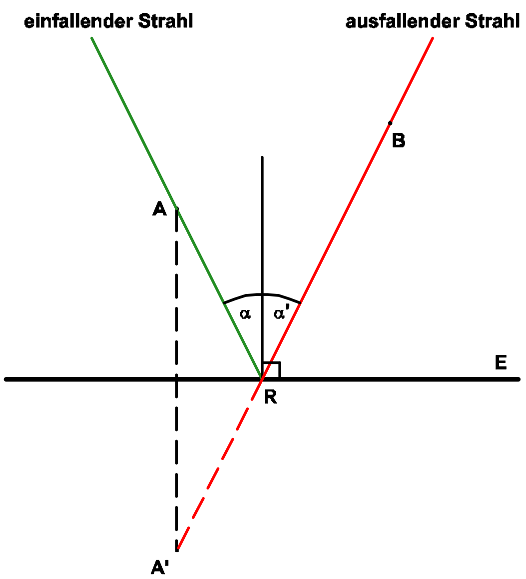
• **Spiegelung an einer Ebene E**



Ist F der Fußpunkt des Lotes von P auf E, dann gilt

$$\boxed{\overrightarrow{p'} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}}$$

• **Reflexion an einer Ebene E**



Wird ein Lichtstrahl an einer Ebene E im Punkt R reflektiert, dann liegen einfallender Strahl und reflektierter Strahl in einer Ebene senkrecht zu E.

Einfallender und reflektierter Strahl schließen mit dem Lot zu E im Reflexionspunkt R gleich große Winkel ein.

Liegt der Punkt A auf dem einfallenden Strahl, dann liegt sein Spiegelpunkt A' bzgl. E auf der Verlängerung des ausfallenden Strahls.