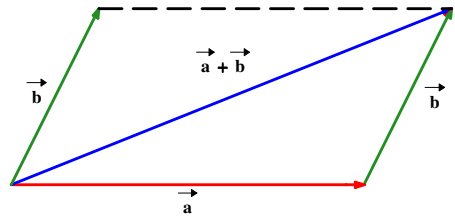
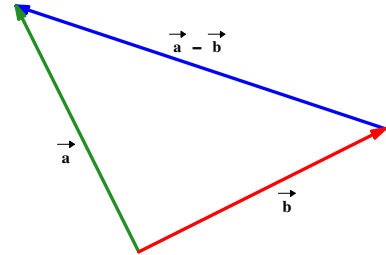


I. Rechnen mit Vektoren

• **Addition** $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$



• **Subtraktion** $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$



• Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

• Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} in kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Anwendungen :

- Der Betrag eines Vektors

Der Betrag eines geometrischen Vektors ist die Länge eines seiner Repräsentanten.

In kartesischen Koordinaten ist der Betrag $a = |\vec{a}|$ eines Vektors \vec{a} gegeben durch

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

- Einheitsvektoren

Hat ein Vektor \vec{a} die Länge a ,

dann hat der Vektor $\vec{a}_0 = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$ die Länge 1. Der Vektor $\lambda \cdot \vec{a}_0$ hat dann die Länge $|\lambda|$

- Winkel zwischen zwei Vektoren

Für den Winkel α , den die Repräsentanten zweier Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ mit gemeinsamen Anfangspunkt einschließen, gilt

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Dabei ist $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ und $b = |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

Sonderfall : Orthogonale (zueinander senkrechte Vektoren)

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

• Vektorprodukt

Das Vektorprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} in kartesischen Koordinaten ist der Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor, der auf \vec{a} und \vec{b} senkrecht steht.

Anwendungen :

- **Flächeninhalt eines Parallelogramms**

Der Betrag des Vektorprodukts zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist gleich dem Inhalt des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.

$$\mathfrak{A} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- Flächeninhalt eines Dreiecks

Für den Flächeninhalt eines von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Dreiecks gilt

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- Abstand eines Punktes von einer Geraden

Für den Abstand eines Punktes P von der Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ gilt

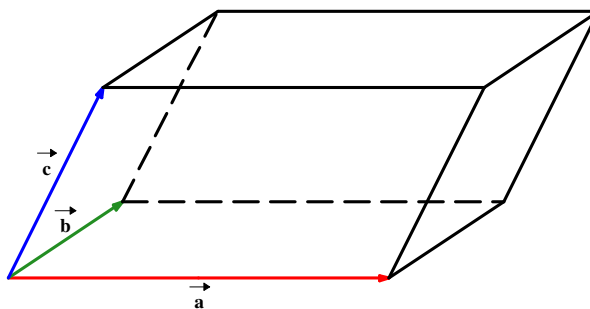
$$d(P; g) = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|} \quad \text{mit } \vec{AP} = \vec{p} - \vec{a}$$

• Spatprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Anwendungen :

- Volumen eines Spats



Der Betrag des Spatprodukts dreier Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ist gleich dem Volumen des von ihnen aufgespannten Spats

$$\mathfrak{V} = \left| |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| \right|$$

- Volumen eines Tetraeders

Für den Rauminhalt eines von den Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Tetraeders gilt

- Abstand eines Punktes von einer Ebene

Für den Abstand eines Punktes P von der Ebene $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}$ gilt

$$\mathbf{d(P; E)} = \frac{|(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{AP}|}{|\vec{v} \times \vec{u}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{u} & \vec{AP} \end{vmatrix} \right|}{|\vec{v} \times \vec{u}|} \quad \text{mit } \vec{AP} = \vec{p} - \vec{a}$$

- Abstand windschiefer Geraden

Für den Abstand zweier windschiefer Geraden

$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{u}$

gilt

$$\mathbf{d(P; E)} = \frac{|(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{AB}|}{|\vec{v} \times \vec{u}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{u} & \vec{AB} \end{vmatrix} \right|}{|\vec{v} \times \vec{u}|} \quad \text{mit } \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

II. Vektoren und Punkte

• Verbindungsvektor

Sind \vec{a} und \vec{b} zwei Ortsvektoren, dann ist $\vec{b} - \vec{a}$ der Verbindungsvektor \vec{AB} von A und B.

• Teilverhältnis

Liegt der Punkt T auf der Geraden durch die Punkte A und B und ist $T \neq B$, dann gibt es ein $\tau \in \mathbb{R}$, so dass

$$\vec{AT} = \tau \cdot \vec{TB}$$

ist.

τ bezeichnet man als das Teilverhältnis, in dem T die Strecke $[AB]$ teilt.

Man unterscheidet zwischen innerer Teilung ($\tau > 0$) und äußerer Teilung ($\tau < 0$).

Anwendungen :

- Ortsvektor des Mittelpunkts einer Strecke $[AB]$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

- Ortsvektor des Schwerpunkts eines Dreiecks ABC

$$\vec{s} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

III. Geraden

- **Parametergleichung einer Geraden**

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$$

- Bestimmung der Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen (Spurpunkte)

Ebene	Bedingung
x_1x_2 -Koordinatenachse	$x_3 = 0$
x_1x_3 -Koordinatenachse	$x_2 = 0$
x_2x_3 -Koordinatenachse	$x_1 = 0$

- Sind $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{u}$ die Parametergleichungen zweier Geraden, dann gilt

$g \parallel h$	\vec{u} und \vec{v} sind kollinear
g und h sind windschief	$\left\{ \vec{b} - \vec{a}, \vec{v}, \vec{u} \right\}$ ist linear unabhängig
Schnittpunktbedingung	$\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{u} =$

IV. Ebenen

• Parametergleichung einer Ebene

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}$$

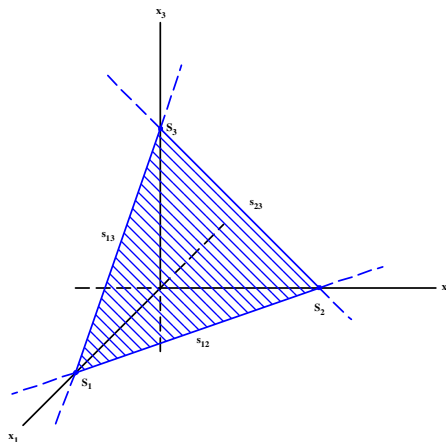
Anwendungen :

- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Achse	Bedingung
x_1 -Koordinatenachse	$x_2 = x_3 = 0$
x_2 -Koordinatenachse	$x_1 = x_3 = 0$
x_3 -Koordinatenachse	$x_1 = x_2 = 0$

- Bestimmung der Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen (Spurgeraden)

Ebene	Bedingung
x_1x_2 -Koordinatenachse	$x_3 = 0$
x_1x_3 -Koordinatenachse	$x_2 = 0$
x_2x_3 -Koordinatenachse	$x_1 = 0$



- Geraden, parallel zu einer Ebene

Eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{b} + \sigma \cdot \vec{w}$ ist genau dann parallel zur Ebene

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u},$$

wenn die Vektoren $\left\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right\}$ linear abhängig (komplanar) sind.

Liegt darüberhinaus der Aufpunkt von g in E , dann liegt g in E .

- **Drei-Punkte-Form einer Ebenengleichung**

Sind \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} die Ortsvektoren dreier Punkte A, B und C,
die nicht auf einer Geraden liegen,

dann wird durch sie eindeutig eine Ebene E festgelegt.

Eine Parametergleichung dieser Ebene ist dann

$$\boxed{E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}}$$

- **Koordinatenform einer Ebenengleichung**

Ein Punkt X mit dem Ortsvektor \vec{x} liegt genau dann auf einer Ebene E mit der Parametergleichung

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u},$$

wenn die

die Vektoren $\vec{x} - \vec{a}$, \vec{v} und \vec{u} linear abhängig (komplanar) sind. Es ist dann

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_1 & u_1 \\ x_2 - a_1 & v_2 & u_2 \\ x_3 - a_1 & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die sich ergebende Gleichung in den drei Unbekannten x_1 , x_2 und x_3 hat dann die Form

$$\boxed{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 = 0}$$

und heißt Koordinatenform der Ebenengleichung.

Ein Punkt $P \left(\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \right)$ liegt genau in der Ebene, wenn $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 = 0$ ist.

Anwendungen :

- Schnitt von Geraden und Ebenen

- **Achsenabschnittsform einer Ebenengleichung**

Ist eine Ebene zu keiner Koordinatenachse parallel und geht sie nicht durch den Koordinatenursprung und, dann besitzt sie eine Koordinatengleichung der Form

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 0$$

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind dann

$$S_{x_1} \left(a \mid 0 \mid 0 \right), S_{x_2} \left(0 \mid b \mid 0 \right) \text{ und } S_{x_3} \left(0 \mid 0 \mid c \right).$$

Man nennt daher die obige Gleichung die Achsenabschnittsform einer Ebenengleichung.-----

- **Normalenform einer Ebenengleichung**

Ist A mit dem Ortsvektor \vec{a} Punkt einer Ebene E und \vec{n} ein Vektor senkrecht zu E,

dann liegt der Punkt X mit dem Ortsvektor \vec{x} genau dann in der Ebene, wenn

$$\vec{n} \cdot \left[\vec{x} - \vec{a} \right] = 0$$

Verwendet man Koordinaten, dann ergibt sich

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \overbrace{(-n_1 a_1 - n_2 a_2 - n_3 a_3)}^{n_4} = 0$$

Man nennt diese Gleichung die Normalenform einer Ebenengleichung.

Anwendungen :

Sind E : $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 = 0$ und F : $m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 = 0$ zwei Ebenen mit

den Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ und $g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ eine Gerade

$E \parallel F$	\vec{n} und \vec{m} sind kollinear
Schnittwinkel α von E und F	$\cos\alpha = \left \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{ \vec{n} \cdot \vec{m} } \right $
$E \perp F$	$\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$
$g \parallel E$	$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$
$g \perp E$	\vec{v} und \vec{n} sind kollinear
Neigungswinkel α von g gegen E	$\sin\alpha = \left \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{ \vec{v} \cdot \vec{n} } \right $

Anwendungen :

- Orthogonale Symmetrieebene einer Strecke

Die Punkte des Raumes, die von zwei gegebenen Punkten A und B gleich weit entfernt sind, bilden eine Ebene, welche die Strecke $[AB]$ orthogonal halbiert.

Ist $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ der

• Hesseform einer Ebenengleichung

Ist \vec{n}_0 der zu einer Ebene gehörende Einheitsnormalenvektor, der vom Ursprung des Koordinatensystem wegweist und \vec{a} der Ortsvektor eines Punktes A in der Ebene, dann heißt

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

die Hessesche Normalenform der Ebene.

Ist

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$$

eine Normalenform der Ebene, dann ergibt sich daraus als Hesseform

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4}{-\operatorname{sgn}(n_4) \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

Setzt man den Ortsvektor \vec{p} eines Punktes P in die Hesseform einer Ebene E ein, dann ergibt sich eine Zahl, deren Betrag gleich dem Abstand des Punktes P von der Ebene ist.

Diese Zahl ist positiv, wenn P auf der ursprungsfernen Seite der Ebene ist, sie ist negativ wenn P auf der ursprungsnahen Seite der Ebene ist.

Punktfolgen die durch Abstände beschrieben werden und daher durch Hesseformen beschrieben werden können :

- die Mittenebene zweier paralleler Ebenen ist die Menge aller Punkte, die von den beiden Ebenen konstanten Abstand haben
- die Winkelhalbierenden Ebenen zu zwei sich schneidenden Ebenen bilden die Menge aller Punkte die von diesen Ebenen gleichen Abstand haben
- die Ebenen deren Punkte von einer gegebenen Ebene konstanten Abstand haben

etc.

V. Kugel

Ein Punkt X mit dem Ortsvektor \vec{x} liegt genau dann auf der Kugel $K(M; r)$ um den Mittelpunkt M mit Radius r, wenn

$$\|\vec{x} - \vec{m}\|^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

ist.

\vec{m} ist dabei der Ortsvektor des Mittelpunkts M.

Es gilt

- Eine Gerade ist Tangente an die Kugel $K(M; r)$, wenn ihr Abstand von M gleich r ist.

- Berührt eine Gerade

$$g: \vec{x} = \vec{b} + \sigma \cdot \vec{w}$$

eine Kugel $K(M; r)$ im Punkt B, dann gilt

$$\vec{MB} \perp \vec{w}.$$

- Eine Ebene ist Tangentialebene an eine Kugel $K(M; r)$, wenn ihr Abstand von M gleich r ist.

- Berührt eine Ebene E eine Kugel im Punkt B, dann ist der Vektor $\vec{BM} = \vec{m} - \vec{b}$ ein Normalenvektor der Ebene d.h.

$$(\vec{b} - \vec{m}) \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

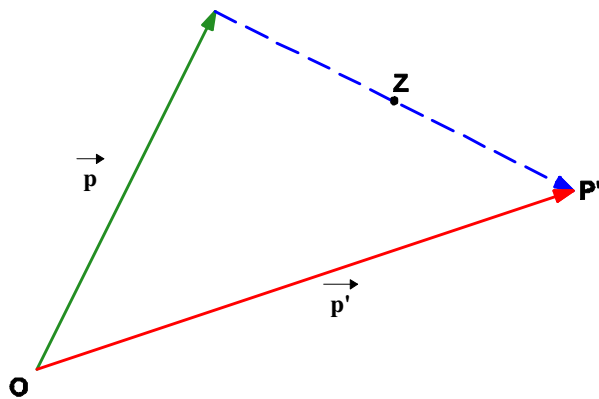
ist eine Normalenform der Tangentialebene E.

- Ist der Abstand d einer Ebene E vom Mittelpunkt M einer Kugel kleiner als der Radius, dann schneidet E die Kugel in einem Kreis mit Radius r_1 . Es ist

$$r^2 = d^2 + r_1^2$$

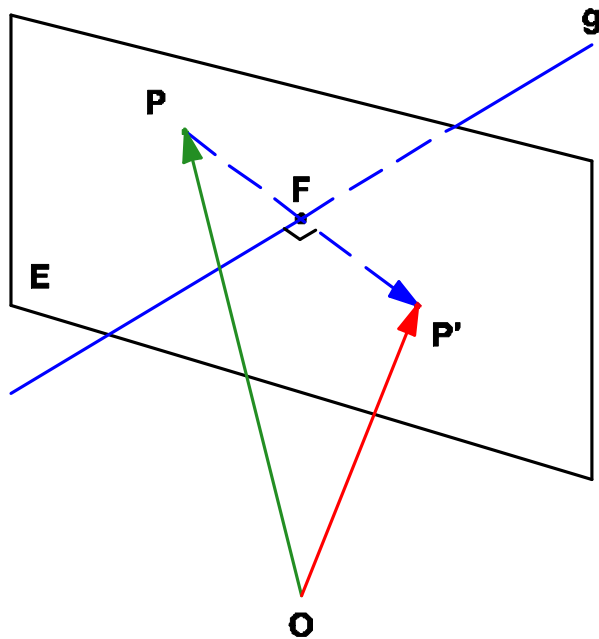
VI. Spezialaufgaben

- **Punktspiegelung am Zentrum Z**



$$\vec{p}' = \vec{p} + 2 \cdot \vec{PZ}$$

- **Spiegelung an einer Geraden g**

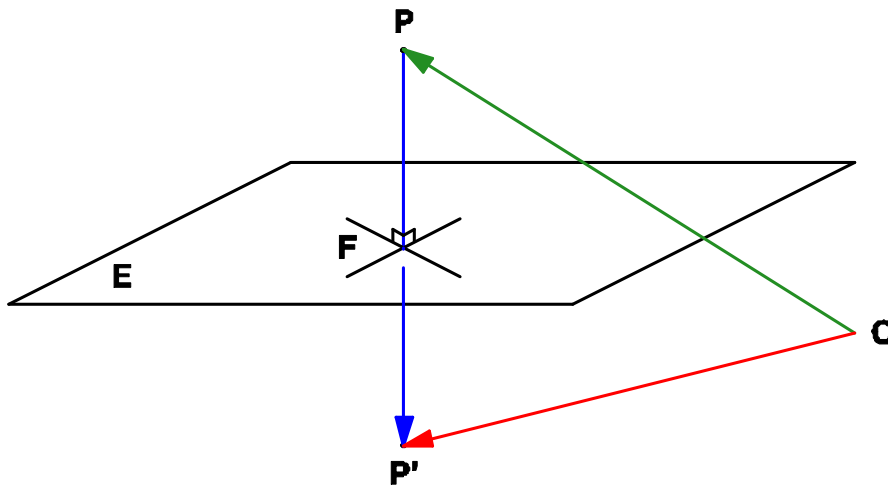


Ist F der Fußpunkt des Lotes von P auf g, dann gilt

$$\vec{p}' = \vec{p} + 2 \cdot \vec{PF}$$

Der Punkt P, der Lotfußpunkt F und der Bildpunkt P' liegen in einer Ebene E senkrecht zu g.

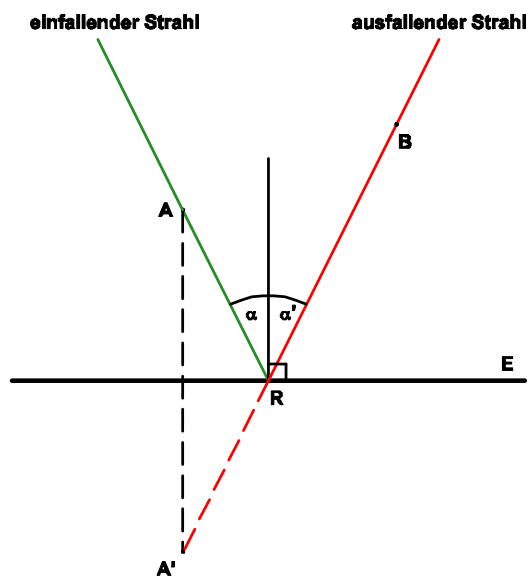
- Spiegelung an einer Ebene E



Ist F der Fußpunkt des Lotes von P auf E, dann gilt

$$\vec{p}' = \vec{p} + 2 \cdot \vec{PF}$$

- Reflexion an einer Ebene E



Wird ein Lichtstrahl an einer Ebene E im Punkt R reflektiert, dann liegen einfallender Strahl und reflektierter Strahl in einer Ebene senkrecht zu E.

Einfallender und reflektierter Strahl schließen mit dem Lot zu E im Reflexionspunkt R gleich große Winkel ein.

Liegt der Punkt A auf dem einfallenden Strahl, dann liegt sein Spiegelpunkt A' bzgl. E auf der Verlängerung des ausfallenden Strahls.