I. Defintionsmenge - Nullstellen

==

Gleichungstyp	Lösung
$e^x = a$	$x = \ln a$
$e^{bx} = a$	$x = \frac{1}{b}\ln a$
$a\cdot e^{2x} + b\cdot e^x + c = 0$	Überführung durch Substitution $u = e^x$ in die quadratische Gleichung $au^2 + bu + c = 0$

Aufgaben

---

1. Bestimme die Nullstellen von

a) $f : x \to 2e^{\frac{1}{x}} - 1$ b) $f : x \to e^{-2x} - 3e^{-x} + 2$

b) Bestimme die maximale Definitionsmenge

a) $f : x \to \dfrac{1}{e^{2x} - 2e^x}$ b) $f : x \to \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x - 2}}$ c) $f : x \to \sqrt{1 - 2e^x}$

II. Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

==

Typ	Methoden zur Grenzwertbestimmung
$\frac{\infty}{\infty}$	a) Geeignete Umformung b) .l'Hospital : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ für $a \in \mathbb{R}$ bzw. $a = \pm\infty$
$\frac{0}{0}$	a)) Geeignete Umformung b) .l'Hospital $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ für $a \in \mathbb{R}$ bzw. $a = \pm\infty$
$0\cdot\infty$	Geeigete Umformung (Umwandlung des Funktionsterms in einen Bruchterm)
$\infty - \infty$	Geeignete Umformung (Umwandlung des Funktionsterms durch Ausklammern)

Ist $f(x) = g[h(x)]$ die Vernüpfung zweier Funktionen, dann untersucht man zur Bestimmung von

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ zuerst $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$.

Hat man $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = u_0$ bestimmt, dann untersucht man $\lim\limits_{u \to u_0} g(u)$.

Beispiele :

1\. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

2\. a) $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{(e^x+1)\cdot(e^x-1)}{e^x-1} = \lim\limits_{x \to 0+0} (e^x+1) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{e^x-1}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{e^x}{1} = 1$

3\. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\cdot e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0-0$

4\. $\lim\limits_{x \to \infty} (x-e^x) = \lim\limits_{x \to \infty} [e^x\cdot(\frac{x}{e^x}-1)] = -\infty$ da $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$

5\. $\lim\limits_{x \to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ weil $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty$ und $\lim\limits_{u \to \infty} e^u = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0+0$ weil $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ und $\lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0+0$

III. Ableitung - Monotonie - Extrema

==

Grundtyp	Ableitung
$f(x) = g(x) \cdot e^x$	$f'(x) = g'(x) \cdot e^x + g(x) \cdot e^x$
$f(x) = \dfrac{e^x}{g(x)}$	$f'(x) = \dfrac{g(x) \cdot e^x - g'(x) \cdot e^x}{[g(x)]^2}$
$f(x) = g[e^x]$	$f'(x) = g'[e^x] \cdot e^x$

Aufgaben

---

1. Bestimme den Term der Ableitungsfunktion

a) $f : x \to x \cdot e^{\sqrt{x}}$ b) $f : x \to \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$ c) $f : x \to (x^2 + 1) \cdot e^{1-x}$ d) $f_a : x \to \dfrac{x}{a} \cdot e^{ax}$

Die Monotonie einer Funktion kann sich an **Nullstellen der 1. Ableitung**, **Definitionslücken** oder **Unstetigkeitsstellen** ändern.

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$	Punkt $(x_0; f(x_0))$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	Hochpunkt
$f'(x)$	$-$	0	$+$	Tiefpunkt
$f'(x)$	$+$	0	$+$	Terrassenpunkt
$f'(x)$	$-$	0	$-$	Terrassenpunkt

Bei Funktionenscharen unbedingt das Vorzeichen des Parametrers beachten !

Gegebenfalls eine Fallunterscheidung treffen.

Manchmal ist es günstig, die Art des Extremums mit Hilfe der 2. Ableitung zu bestimmen

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	Punkt $(x_0; f(x_0))$
0	$+$	Tiefpunkt
0	$-$	Hochpunkt

IV. Krümmungsverhalten - Wendepunkt

Das Krümmungsverhalten einer Funktion kann sich an **Nullstellen der 2. Ableitung**, **Definitionslücken** oder **Unstetigkeitsstellen** ändern.

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$	Punkt $(x_0; f(x_0))$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	Wendpunkt
	LK		RK	

	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$	Punkt $(x_0; f(x_0))$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	Wendepunkt
	LK		RK	

Es gilt auch

$f''(x_0)$	$f'''(x_0)$	Punkt $(x_0; f(x_0))$
0	$\neq$	Wendepunkt

Im Wendepunkt steigt bzw. fällt der Graph einer Funktion lokal am stärksten.

Wendetangente und -nomale :

$\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)}$ $\boxed{y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)}$ falls $f'(x_0) \neq 0$

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : x \rightarrow (x^2 + \frac{2x}{a})\cdot e^{ax}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

a) Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion der Schar durch. Charakterisieren Sie die Schar insgesamt.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktionenschar für $a = 1$ in einem sinnvollen Bereich.

c) Sei nun p_a eine Parabelschar mit der Gleichung : $p_a : y = a\cdot(x^2 + \frac{2x}{a})$

Zeigen Sie, dass f_a und g_a im Normalfall drei Schnittpunkte haben. Rechnen Sie die drei Schnittpunkte für $a = 5$ aus.

Berechnen Sie diejenigen Werte von a, für die sich die Graphen von f_a und g_a nur in zwei Punkten schneiden. Erläutern bzw. interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Lösung :

a) Nullstellen : $f_a(x) = (x^2 + \frac{2x}{a})\cdot e^{ax} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 + \frac{2x}{a}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -\frac{2}{a}$

Grenzverhalten : $\lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (x^2 + \frac{2x}{a})\cdot e^{ax} = \infty$ weil

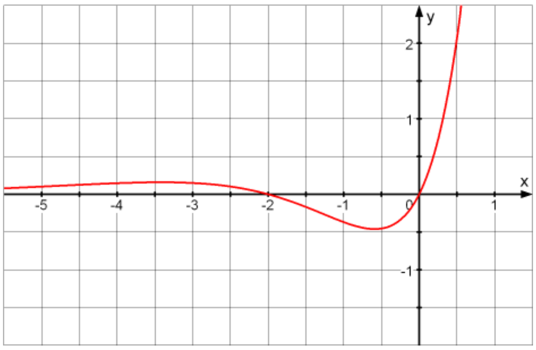
$$\lim_{x \to \infty} (x^2 + \frac{2x}{a}) = \infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} e^{ax} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + \frac{2x}{a}}{e^{-ax}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + \frac{2}{a}}{-ae^{-ax}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{a^2 e^{-ax}} = 0$$

Extrema : $f_a'(x) = (2x + \frac{2}{a}) \cdot e^{ax} + (x^2 + \frac{2x}{a}) \cdot e^{ax} \cdot a = (ax^2 + 2x + \frac{2x}{a} + \frac{2}{a}) \cdot e^{ax} = 0 \quad \Rightarrow$

$$x = \frac{-2+\sqrt{2}}{a} \lor x = x = \frac{-2-\sqrt{2}}{a}$$

$$H\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{a} \,\middle|\, \frac{2\sqrt{2}+2}{a^2} \cdot e^{-\sqrt{2}-2} \right) \text{ ist HP} \quad T\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{a} \,\middle|\, \frac{2-2\sqrt{2}}{a^2} \cdot e^{\sqrt{2}-2} \right) \text{ ist TP}$$

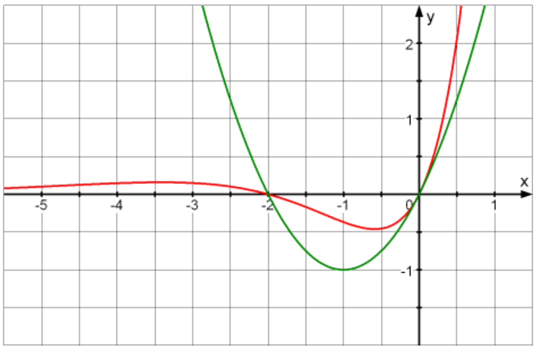


c) $a \cdot (x^2 + \frac{2x}{a}) = (x^2 + \frac{2x}{a}) \cdot e^{ax} \quad \Rightarrow \quad (x^2 + \frac{2x}{a}) = 0 \quad \lor \quad a = e^{ax}$

$$x = 0 \lor x = -\frac{2}{a} \quad \lor \quad x = \frac{1}{a} \ln a$$

Es gibt nur zwei Schnittpunkte, wenn $\frac{1}{a} \cdot \ln a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

Die Graphen berühren sich dann.



V. Integration

==

Typ	Methode
$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\cdot\int a\cdot e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$	Substitution
$\int xe^{ax^2}dx = \frac{1}{2a}\cdot\int 2axe^{ax^2}dx = \frac{1}{2a}\cdot e^{ax^2} + C$	Substitution
$\int \frac{e^x}{e^x+a}dx = \ln\lvert e^x+a\rvert + C$	Substitution
$\int xe^{ax}dx = x\cdot\frac{1}{a}e^{ax} - \int 1\cdot\frac{1}{a}e^{ax}dx = \frac{1}{a}x\cdot e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + C$	partielle Integration
$\int x^2e^{ax}dx = x^2\cdot\frac{1}{a}e^{ax} - \int 2x\cdot\frac{1}{a}e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^2\cdot e^{ax} - \frac{2}{a}\cdot\int xe^{ax}dx =$ $= \frac{1}{a}x^2\cdot e^{ax} - \frac{2}{a}\cdot\left[\frac{1}{a}x\cdot e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}\right] + C = \frac{1}{a}x^2\cdot e^{ax} - \frac{2}{a^2}x\cdot e^{ax} + \frac{2}{a^3}\cdot e^{ax} + C$	partielle Integration (2mal)

Aufgaben

----

1. Berechne

a) $\int (x+1)e^{-x}dx$ b) $\int (e^{2x} - 2e^x)dx$ c) $\int (e^x+1)(e^x-1)dx$ d) $\int \frac{e^{-x}}{e^x+1}dx$

Hinweis zu d) :

$$\int \frac{e^{-x}}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{e^{2x}+e^x}dx \text{ und Ansatz : } \frac{1}{e^{2x}+e^x} = \frac{a}{e^x} + \frac{b}{e^x+1} \text{ (Partialbruchzerlegung)}$$

----

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion

$f : x \to (e^{-x} + 1)^2.$

Berechne den Inhalt der unendlich ausgedehnten Fläche, den der Graph von f im 1. Quadranten mit der y-Achse und der Asymptote $y = 1$ einschließt.