Zufallsgrößen

===

1. In einer Sendung von 10 Artikeln befinden sich 4 fehlerhafte. 4 Artikel werden zufällig entnommen. X beschreibe die Anzahl der fehlerhaften der ausgewählten Artikel.

   a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

   b) Zeichnen Sie das zug. Strichdiagramm!

   c) Berechnen Sie $P(X > 0)$.

---

2. Beim 4-maligen Wurf mit einer L-Münze gebe die Zufallsgröße X die Länge der größten "Zahl"-Folge an

   Bestimmen Sie die W-verteilung von X.

---

3. Ein Student arbeitet aushilfsweise in der Poststelle eines kleinen Unternehmens. An einem Tag muss er Adressaufkleber auf drei vorgefertigte Umschläge kleben. Dummerweise sind die Briefumschläge aber schon zugeklebt, so dass er nicht erkennen kann, welcher Adressaufkleber auf welchen Umschlag gehört.

   Bestimmen Sie die möglichen Realisationen sowie die dazugehörigen Wahrscheinlicheiten der Zufallsvariable

   X : Anzahl der korrekt aufgeklebten Adressaufkleber !

---

4. Eine L-Münze wird solange geworfen, bis eine von beiden Seiten zum zweitenmal erscheint.

   a) Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an!

   b) Sei X die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie die W-verteilung von X !

   c) Wie lautet der Erwartungswert von X ?

---

5. Lohnt es sich, an folgendem Spiel teilzunehmen ?

   Sie zahlen 0,50 € Einsatz. Dafür dürfen Sie mit einer Münze 3 mal werfen. Es gilt fol gende Auszahlungstabelle

Anzahl Z	3	2	1	0
Auszahlungsbetrag in €	1	0,50	0,30	0,20

---

6. Ein Betrunkener kommt von einer Party nach Hause und will die Wohnungstür aufschließen. Er hat 4 Schlüssel, von denen nur einer passt. In zufälliger Auswahl probiert er einen nach dem anderen aus.

   X bezeichne die Anzahl der Schlüssel, die er braucht, um den passenden zu finden.

   Bestimmen Sie den Erwartungswert E(X).

7. Ein Spieler wirft einen Würfel. Erscheint eine gerade Zahl, so gewinnt er den entsprechen den Betrag in €, andernfalls verliert er den entsprechenden Betrag.

   a) Ist das Spiel günstig für den Spieler ?   b) Bei welchem Einsatz ist das Spiel fair ?

---

8. Ein Spieler wirft 2 Würfel. Die Spielbank zahlt für einen Pasch das Doppelte des Produktes der Augenzahlen; in den übrigen Fällen muss der Spieler die Hälfte des Produktes der Augenzahlen an die Spielbank zahlen.

   Ist das Spiel fair ?

---

9. Ein Glücksspieler bietet Ihnen folgendes System an: Eine L-Münze wird 20 mal geworfen.

   Sie gewinnenn1 €, wenn 9, 10, oder 11 mal Zahl erscheint, andernfalls verlieren sie 1 €.
   Ist das Spiel günstig für Sie ?

---

10. Eine Lebensversicherung über 50000 € koste einen 35-jährigen Versicherungsnehmer 400 € Jahresprämie. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein 35-jähriger im folgenden Jahr stirbt, sei 0,003.

    Mit welche Gewinnerwartung hat die Versicherungsgesellschaft in diesem Jahr ?

---

11. In einem Gesellschaftsspiel zahlt man einen bestimmten Geldbetrag ein, wählt eine der 6 Zahlen aus der Menge 1, 2, 3, .. 6 aus und würfelt dann mit 3 Würfeln.

    Zeigen alle 3 Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das 4 - fache seines Einsatzes.
    Zeigen 2 Würfel die gewählte Zahl, so erhält man das 3-fache seines Einsatzes. Zeigt nur ein Würfel auf die gewählte Zahl, so erhält man das doppelte seines Einsatzes.

    In allen anderen Fällen verliert man.

    Sei G der Reingewinn eines Spielers bei einem Spiel. Die Würfel seien L-Würfel.

    a) Bestimmen Sie die W'verteilung von G   b) Ermitteln Sie den Erwartungswert von G!

---

12. Ein Spieler wirft einen idealen Würfel. Erscheint eine Primzahl, dann gewinnt er den Betrag der Augenzahl in € andernfalls verliert er ihn.

    Geben Sie den Erwartungswert und Streuung des Gewinnes bei diesem Spiel an.

---

13. In einem 100-m-Lauf wurden untenstehende Zeiten gemessen. Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung der Laufzeiten.

    9.99 ; 10.08 ; 10.35 ; 9.87 ; 10.05 ; 10.21 (s)

Lösung
===
Aufgabe 1

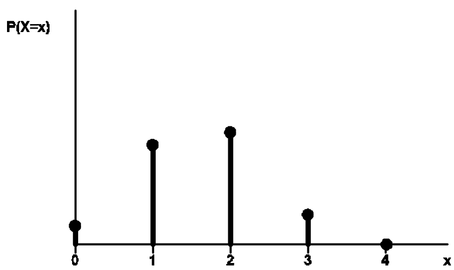
a) $W_X = \left\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\right\}$

1. $\left|\Omega\right| = \binom{10}{4} = 210$

2. $P(X=0) = \dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{0}}{210} = \dfrac{15}{210} = \dfrac{1}{14}$ $\quad P(X=1) = \dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{1}}{210} = \dfrac{15}{210} = \dfrac{80}{210} = \dfrac{8}{21}$ usw.

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	1/14	8/21	3/7	4/35	1/210

b) Strichdiagramm



c) $P(X>0) = 1-P(X=0) = 1-\dfrac{1}{14} = \dfrac{13}{14}$

Aufgabe 2

$W_X = \left\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\right\}$

x	0	1	2	3	4
Realisierung	KKKK	KKKZ, KKZK, KZKK, ZKKK ZKKZ, ZKZK, KZKZ	ZZKK, ZZKZ, KZZK, KKZZ, ZKZZ	ZZZK, KZZZ	ZZZZ
$P(X=x)$	1/16	7/16	5/16	1/8	1/16

Aufgabe 3

$W_X = \{0;\ 1;\ 3\}$

x	0	1	3
$P(X=x)$	2/6	3/6	1/6

Aufgabe 4

a) $\Omega = \{KK,\ ZZ,\ KZK,\ ZKK,\ ZKZ,\ KZZ\}$

b) $W_X = \{2;\ 3\}$

x	2	3
$P(X=x)$	1/2	1/2

c) $E(X) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 3 = 2{,}5$

Aufgabe 5

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Auszahlung X

Auszahlungsbetrag x in €	1	0,50	0,30	0,20
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{8} + 0{,}5\cdot\frac{3}{8} + 0{,}3\cdot\frac{3}{8} + 0{,}2\cdot\frac{1}{8} = 0{,}45$$

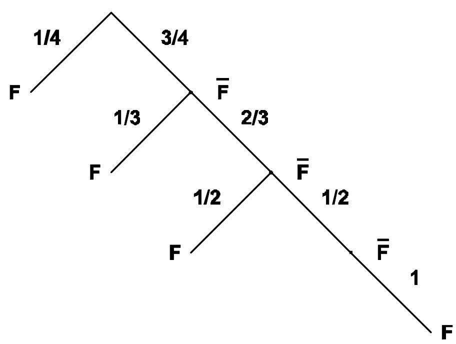
Es lohnt sich nicht, da der Erwartungswert der Auszahlung kleiner als der Einsatz ist.

Aufgabe 6

X : Anzahl der Versuch

$W_X = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 2{,}5$$



Beachte nebenstehendes Baumdiagramm

Aufgabe 7

a) X : Gewinn

	-5	-3	-1	1	3	5
$P(X=x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$E(X) = 0{,}5$

b) Der Einsatz müsste 0,50 € betragen.

Aufgabe 8

Übersicht :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

X : Gewinn

$$W_X = \left\{ 72;\ 50;\ 32;\ 18;\ 8;\ 2;\ -1;\ -1{,}5;\ -2;-2{,}5;\ -3;\ -4;\ -5;\ -6;\ -7{,}5;\ -9;\ -10;-12;-15 \right\}$$

Wahrscheinlichkitsverteilung

x	-15	-12	-10	-9	$-7{,}5$	-6	-5	-4	-3	$-2{,}5$
$P(X=x)$	2/36	4/36	2/36	2/36	2/36	4/36	2/36	2/36	2/36	2/36
x	-2	$-1{,}5$	-1	2	8	18	32	50	72	
$P(X=x)$	2/36	2/36	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	

$$E(X) = -\frac{5}{18} < 0$$

Das Spiel ist nicht fair.

Aufgabe 9

X : Anzahl von Zahl

$$P(X=9) = \frac{\binom{20}{9}}{2^{20}} \approx 0{,}160 \qquad P(X=10) = \frac{\binom{20}{10}}{2^{20}} \approx 0{,}172 \qquad P(X=11) = \frac{\binom{20}{11}}{2^{20}} \approx 0{,}160$$

$P(X=9)+P(X=10)+P(X=11) < 0{,}5$ Das Spiel ist ungünstig.

Aufgabe 10

X : Gewinn

$E(X) = -50000 \cdot 0{,}003 + 400 \cdot 0{,}997 = 248{,}8$

Aufgabe 11

a) Sei a die Zahl auf die man tippt.

G : Gewinn

g	$-a$	a	2a	3a
$P(G = g)$	125/216	75/216	15/216	1/216

b) $E(G) = -\frac{17}{216}a$

Aufgabe 12

G . Gewinn

Wahrscheinlichkeitsverteilung von G

g	-1	2	3	-4	5	-6
$P(G = g)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$E(G) = -\frac{1}{6}$

$Var(G) = E(G^2) - \left[E(G)\right]^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(1+4+9+16+25+36\right) - \frac{1}{36} = \frac{545}{36}$

$\sigma = \sqrt{\frac{545}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{545} \approx 3{,}9$

Aufgabe 13

Mittelwert ca. 10,09 s

Standardabweichung ca 0,024 s
