Abituraufgaben

==

In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Geradenschar $g_k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -k^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben, wobei k, λ und μ aus $\mathbb{R}$ sind.

1. a) Zeigen Sie: Alle Geraden der Schar g_k sind zueinander parallel und liegen in einer Ebene E.

   b) Begründen Sie, dass die Schar der Geraden g_k eine Halbebene von E bildet.

   c) Für welche Werte von k schneidet g_k die Gerade h .

   Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S.

---

2. Gegeben ist die Ebenenschar $Z_a:\ \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a-4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\lambda, \tau, a \in \mathbb{R}$

   Alle Scharebenen haben eine Gerade gemeinsam, die mit g bezeichnet wird. Geben Sie eine Gleichung von g an.

---

3. In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene $H:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit

   $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ sowie die Schar von Geraden $g_a:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3a \\ -3a \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, a \in \mathbb{R}$

   gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass keine der Geraden g_a parallel zur Ebene H verläuft.

   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S_a von g_a mit H.

---

4. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem für

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & 3x_1 \quad - \quad dx_2 & = & -2d \\
\text{(II)} & (1001-a)x_2 - 5x_3 & = & -10 \\
\text{(III)} & (1001+a)x_3 & = & 4004
\end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass das System bei gegebenem $d \in \mathbb{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}$, $|a| \neq 1001$, eindeutig lösbar ist.

b) In welchem der Fälle $|a| = 1001$ hat das System mehr als eine Lösung ?

c) Bestimmen Sie a und d so, dass $\left(x_1 \middle| x_2 \middle| x_3\right) = \left(15 \middle| 5 \middle| 2002\right)$ Lösung des Gleichungssystems ist.

---

5. Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die beiden Geradenscharen g_t und h_t :

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2t \\ -3t \\ 2+5t \end{pmatrix}, t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

a) Begründen Sie, da alle Geraden der Schar g_t zueinander parallel sind und dass alle Geraden der Schar h_t einen gemeinsamen Punkt haben.

b) Die Ebene G enthält alle Geraden g_t. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G.

---

5. a) Alle Geraden der Schar g_t haben den gleichen Richtungsvektor und alle Geraden der Schar h_t den gleichen Aufpunkt.

b) Für den Ortsvektor eines Punktes auf der Geraden g_t gilt

---

6. In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkte $A\left(9 \middle| 5 \middle| -4\right)$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$

a) Zeigen Sie, dass alle Punkte $P_t\left(8-2t \middle| 4-2t \middle| 8t\right)$ mit $t \in \mathbb{R}$ auf derjenigen Geraden h liegen, die parallel zu g verläuft und den Punkt A enthält.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Ebene, die g und h enthält.

Lösung :

===

1. a) Die Schargeraden sind zueinander parallel, weil sie den gleichen Richtungsvektor besitzen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -k^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (-k^2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (-k^2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \sigma = -k^2 \ 0, \tau \in \mathbb{R}$$

Die Geraden liegen in der Ebene E mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Schargeraden sind zueinander parallel, weil sie den gleichen Richtungsvektor besitzen.

b) Weil $\sigma = -k^2 \le 0$ ist, liegen die Schargeraden lediglich in einer Hälfte von E.

c) Bedingung für das Schneiden :

$$\begin{vmatrix} -k^2-2 & 3 & 0 \\ 0-1 & 2 & -1 \\ -1-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k^2-2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4k^2 - 8 + 9 - 3 - 2k^2 - 4 + 6 =$$

$$= -6k^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \ \vee \ k = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Beide Werte ergeben die gleiche Gerade.

Schnitt : $\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{5}{6}, \mu = -\frac{2}{3} \quad S\left(2 \,\middle|\, 5/3 \,\middle|\, 2/3\right)$

---

2. $Z_a : \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a-4 \\ 2 \end{pmatrix}$ zeigt; die Gerade $\vec{x} = \overrightarrow{OD} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit dem Aufpunkt D in der Ebene Z_a liegt.

---

3. a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3a \\ -1 & 1 & -3a \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 8+3a-3a = 8 \neq 0$ zeigt : Keine Gerade ist parallel zu H.

b)

$$\begin{array}{r|rcl} (1) & 8+\sigma & = & a^2+3a\lambda \\ (2) & -\sigma+\tau & = & -3a\lambda \\ (3) & -\tau & = & -a^2+8\lambda \end{array}$$

$(1)+(2)$ ergibt $8+\tau = a^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = a^2-8$

in (3) $\quad -a^2+8 = -a^2+8\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad S\left(a^2+3a \mid -3a \mid -a^2+8\right)$

---

4. a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -d & 0 \\ 0 & 2002 & -5 \\ 0 & 0 & 1001+a \end{vmatrix} = 3\cdot(1001-a)\cdot(1001+a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1001 \vee a = -1001$$

Für $|a| \neq 1001$ hat das Gleichungssystem also eine eindeutige Lösung.

b) $a = 1001$ eingesetzt ergibt

$$\begin{array}{r|rcl} (I) & 3x_1-dx_2 & = & -2d \\ (II) & -5x_3 & = & -10 \\ (III) & 2002x_3 & = & 4004 \end{array}$$

(I) und (ii) $\Rightarrow x_3 = 2$

Parametrisierung von (I) : $x_2 = k \quad \Rightarrow \quad 3x_1-d\cdot k = -2d \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{3}d\cdot k-\frac{2}{3}d$

$$L = \left\{ \left(\frac{1}{3}d\cdot k-\frac{2}{3} \mid k \mid 2\right) \middle| k\in\mathbb{R} \right\}$$ also mehr als eine Lösung.

$a = -1001$ eingesetzt ergibt

$$\begin{array}{l|rcr} \text{(I)} & 3x_1 - dx_2 & = & -2d \\ \text{(II)} & 2002x_2 - 5x_3 & = & -10 \\ \text{(III)} & 0 & = & 4004 \end{array}$$

Widerspruch und damit keine Lösung.

c) Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{array}{lrcr} \text{(I)} & 45 \quad - \quad 5d & = & -2d \\ \text{(II)} & (1001 - a)\cdot 5 - 5\cdot 2002 & = & -10 \\ \text{(III)} & (1001 + a)\cdot 2002 & = & 4004 \end{array}$$

(I) $\Rightarrow d = 15$

(II) $\Rightarrow a = -999$ und dies erfüllt auch die Gleichung (III).

---

5. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = t\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \sigma\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit $\sigma = t$ und $\tau = \lambda$

Die Geraden der Schar liegen also auf der Ebene G $\vec{x} = \sigma\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

---

6. a) $\vec{p_t} = \begin{pmatrix} 8-2t \\ 4-2t \\ 8t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $\mu = t$.

Alle Punkte P_t liegen auf der Geraden h.

Wegen $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = -2\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist h parallel zu g.

A in h eingesetzt, $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ergibt $\mu = -0{,}5$ und damit ist $A \in h$.
