Krümmungsvehalten und Wendepunkte

Eine Punktmenge M der Ebene heißt ***konvex***, wenn die Verbindungstrecke zweier in M liegenden Punkte bollständig im Mliegt

Eine in einem Intervall I definierten Funktion f heißt ***linksgekrümmt*** oder ***konvex***, wenn die Menge der über dem Graphen liegenden Punkte

$$\left\{ \left(x \mid y \right) \middle| \; x \in I \text{ und } y > f(x) \right\}$$

konvex ist.

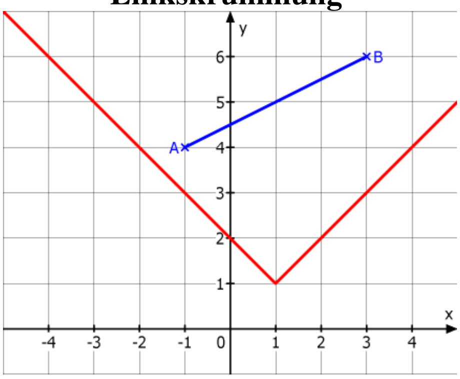
Eine in einem Intervall I definierten Funktion f heißt ***rechtsgekrümmt*** oder ***konkav***, wenn die Menge der unter dem Graphen liegenden Punkte

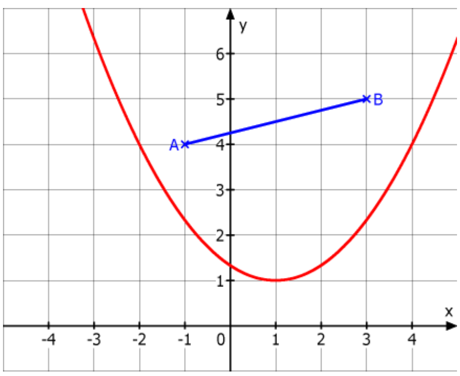
$$\left\{ \left(x \mid y \right) \middle| \; x \in I \text{ und } y < f(x) \right\}$$

konvex ist.

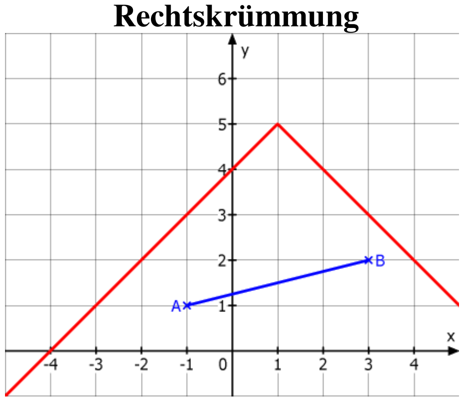
Beispiele:

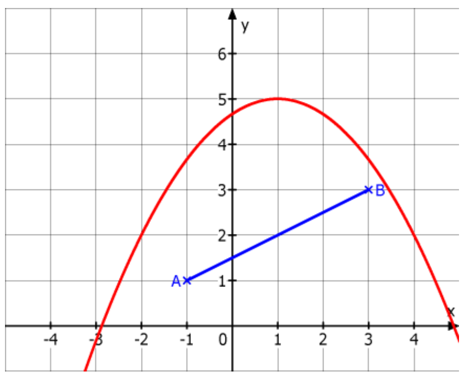
Linkskrümmung





Rechtskrümmung





Kriterium I

Ist die erste Ableitung f ' einer auf einem Intervall I definierten und einmal differenzierbaren Funktion f streng monoton

• zunehmend, dann ist der Graph von f in I ***linksgekrümmt***,

• abnehmend, dann ist der Graph von f in I ***rechtsgekrümmt***

Kriterium II

Ist die Ableitung f '' einer auf einem Intervall I definierte und zweimal differenzierbaren Funktion f

• positiv, dann ist der Graph von f in I ***linksgekrümm***t

• negativ, dann ist der Graph von f in I ***rechtsgekrümmt***

Ein Punkt $W\left(x_W \mid y_W = f(x_W)\right)$ im Innern eine Intervalls I, auf dem eine Funktion f definiert

und differenzierbar ist, heißt ***Wendepunkt***, wenn der Graph von f links und rechts von x_W unterschiedliches Krümmungsverhalten hat.

Die Tangente in einem Wendepunkt an den Graphen von f heißt ***Wendetangente***.

Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente heißt ***Terrassenpunkt*** des Graphen von f

Ist f zweimal differenzierbar und ist x_w eine Wendestelle von f, dann ist $f''(x_w) = 0$.

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und ist $f''(x_w) = 0$ und $f'''(x_w) \neq 0$, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

Ist f eine im Innern eines Intervalls zweimal differenzierbare Funktion und x_0 ein kritischer Punkt von f, dann gilt

1. Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist $f(x_0)$ ein ***lokales Maximum*** von f.

2. Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist $f(x_0)$ ein ***lokales Minimum*** von f.