Wachstum

==

Bei zwei verschiedenen Sorten von Tomatenpflanzen wurde bei je an einem Exemplar die Höhe der Pflanze gemessen.

	t (Tage)	0	5	10	20
Sorte 1	Höhe h_1 (cm)	**10**	12,8	16,5	**27,2**
Sorte2	Höhe h_2 (cm)	**10**	27,7	41,5	**60,6**

a) Begründen Sie anhand aller Tabellenwerte, dass man bei Sorte 1 für den betrachteten Zeit. raum unbegrenztes exponentielles Wachstum annehmen kann.

Stellen Sie die Gleichung der Wachstumsfunktion in der Form $h_1(t) = c\cdot e^{k_1 t}$ auf. Benutzen Sie die dazu in der Tabelle hervorgehobenen Werte, um c und k_1 zu bestimmen.

b) Es wird angenommen, dass das Wachstum der Sorte 2 näherungsweise durch die Funktion h_2 mit $h_2(t) = 90 - d\cdot e^{k_2 t}$ beschrieben werden kann.

Benutzen Sie die dazu in der Tabelle hervorgehobenen Werte, um d und k_2 zu bestimmen.

c) Begründen Sie, dass im Wachstumsmodell für die Sorte 2 die Pflanzen im Wachstum begrenzt sind und geben Sie die kleinste obere Schranke die Höhe an.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, t an dem 95% dieses Wertes erreicht sind.

d) Berechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze der Sorte 2 zum Zeitpunkt der Pflanzung ($t = 0$). Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem eine Pflanze der Sorte 1 diese Wachstumsgeschwindigkeit erreicht.

e) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t innerhalb der ersten 40 Tage, an dem die Höhendifferenz beider Pflanzensorten am größen ist. Geben Sie maximale Höhendifferenz an.

f) Das Wachstum wird durch kontinuierliche Zugabe von Dünger verbessert, wobei die Menge
an Dünger (gemessen in Gramm) pro Tag 10% der Pfanzenhöhe (gemessen in cm) beträgt.

Berechnen Sie, wie viel Dünger für eine Pflanze der zweiten Sorte während der 50-tägigen Wachstumsphase beträgt.

---

a) $\frac{12,8}{10} = 1,28 \quad \frac{16,5}{12,8} = 1,29 \quad \sqrt{\frac{27,2}{16,5}} = 1,28$ (Zeitlicher Abstand beträgt $2\cdot 5$ Tage)

Bemerkung: Wachstumsfaktor im Zeitraum eines Tages ist gegeben durch $\sqrt[5]{1,28} = 1,05$

$90 - d\cdot e^{k_1\cdot 0} = 10 \quad\Rightarrow\quad d = 80$

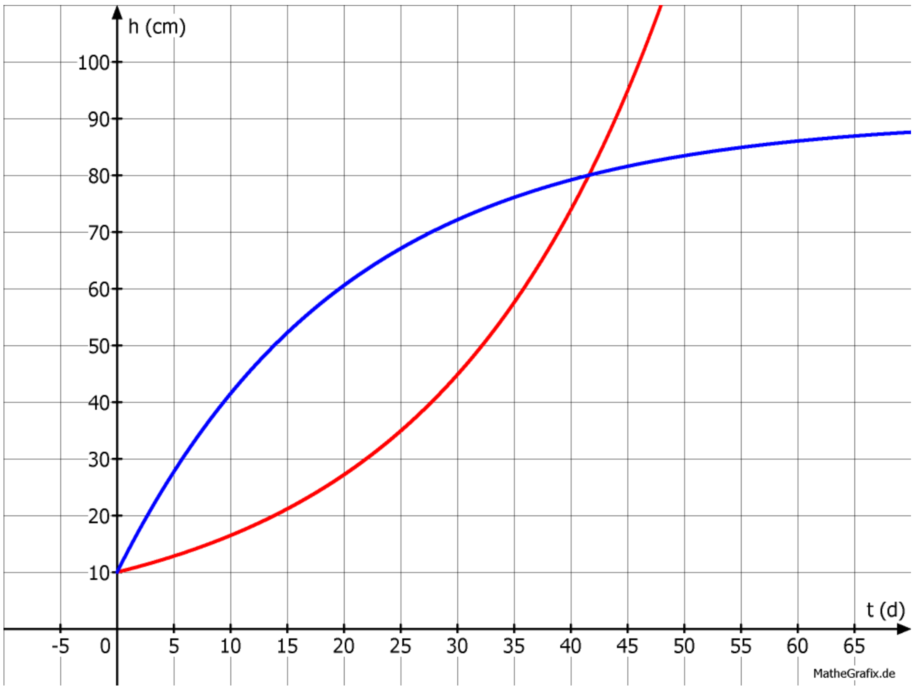
$$10 \cdot e^{k_1 \cdot 20} = 27{,}2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{\ln 2{,}72}{10} = 0{,}05$$

b) $90 - d \cdot e^{k_2 \cdot 0} = 10 \quad \Rightarrow \quad d = 10$

$$90 - 80 \cdot e^{k_2 \cdot 20} = 60{,}6 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{\ln \frac{29{,}4}{80}}{10} = -0{,}05$$

c) $\lim\limits_{t \to \infty} h_2(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \left[90 - 80 \cdot e^{-0{,}05t} \right] = 90$

Durch $h_2(t)$ wird ein beschränktes Wachstum beschrieben.



$$0{,}95 \cdot 90 = 90 - 80 \cdot e^{-0{,}05t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln \frac{4{,}5}{80}}{-0{,}05} \approx 57{,}6 \text{ (Tage)}$$

d) $h_2'(t) = 4 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad h_2'(0) = 4 \left(\frac{\text{cm}}{\text{d}} \right)$

$$h_1'(t) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}05t} = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 8}{0{,}05} \approx 41{,}6$$

e) $d(t) = 90 - 80 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t} - 10 \cdot e^{0{,}05t} \quad \Rightarrow \quad d'(t) = 4 \cdot e^{-0{,}05t} - 0{,}5 \cdot e^{0{,}05t} = 0$

$$\Rightarrow \quad 4 - 0{,}5 \cdot e^{0{,}1t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 8}{0{,}1} \approx 20{,}8$$

Die maximale Höhendifferenz wird nach 20,8 Tagen erreicht. Sie beträgt ca. 33,4 cm

f) $\int_0^{50}(90-80\cdot e^{-0,05\cdot t})dt = \left[90x+1600\cdot e^{-0,05t}\right]_0^{50} \approx 3031$

Man benötigt ungefähr $0,1\cdot 3031 \approx 303$ g Dünger.
