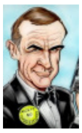
 **Es geht alles vorbei - vieles kommt wieder! (Ian Fleming)**

Ober- und Untersumme

==

1. Das Diagramm zeigt den Graphen der Funktion

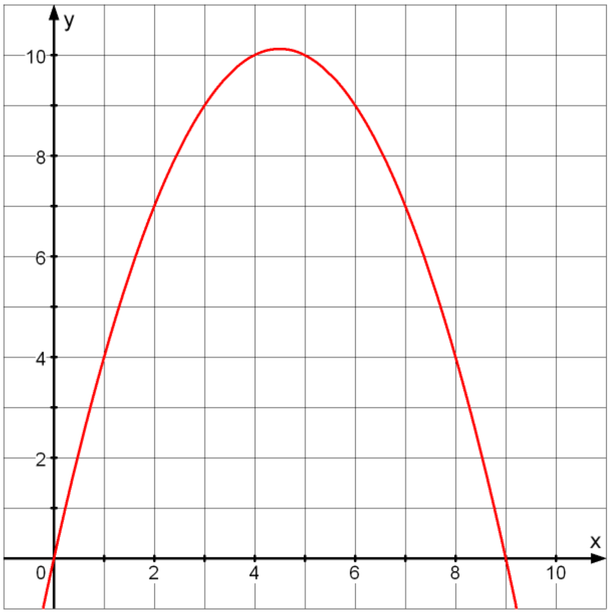
$$f : x \rightarrow y \; = \; -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

a) Schätze das Integral $\int_1^7 f(x)dx$ durch

die Untersumme s_3 nach unten und

die Obersumme S_3 nach oben ab.

Es ist $\int_0^7 f(x)dx \; = \; 51.$



Berechne die Abweichung von s_3 bzw. S_3 vom genauen Integralwert in Prozent.

b) Verwende für die Abschätzung s_6 und S_6.

Lösung:

a)

x	1	3	4,5	5	7
f(x)	4	9	10,125	10	7

$s_3 \; = (4 + 9 + 7) \cdot 2 \; = \; 40$ und $S_3 \; = \; (9 + 10{,}125 + 10) \cdot 2 \; = \; 58{,}25$

Abweichung ca. 21,6% bzw. 14,2%

b)

x	1	2	3	4	4,5	5	6	7
f(x)	4	7	9	10	10,15	10	9	7

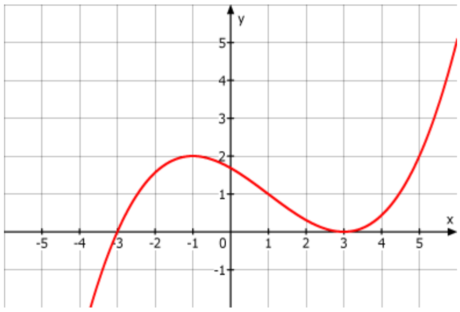
$s_6 \; = \; (4 + 7 + 9 + 10 + 9 + 7) \cdot 1 \; = \; 46$ und $S_6 \; = \; (7 + 9 + 10 + 10{,}125 + 10 + 9) \cdot 1 \; = \; 55{,}125$

Abweichung ca. 9,8% bzw. 8,1%

Integralfunktionen

==

Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$.



Betrachten Sie die Integralfunktion

$$F : x \to \int_1^x f(t)dt \text{ mit dem Graphen } G$$

und entscheiden Sie ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihr Antwort.

a) G hat an der Stelle $x = -3$ einen Tiefpunkt.

b) G an der Stelle $x = 3$ einen Hochpunkt.

c) F ist für $x \geq -3$ streng monoton steigend.

d) F besitzt zwei Nullstellen.

e) F hat zwei Wendestellen.

f) Die Tangente an G an der Stelle $x = 1$ ist parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

g) Es ist $F(-1) < F(1)$

h) F ist für $-\infty < x \leq 1$ rechtsgekrümmt.

Lösung:

a) w ($x = -1$ ist Nullstelle des Integranden mit Vorzeichen $- \to +$)

b) f ($x = 3$ ist Nullstelle des Integranden ohne Vorzeichenwechsel)

c) w (der Integrand ist nicht negativ mit isolierten Nullstellen)

d) w (die untere Integrationsgrenze ist Nullstelle und es kommt einmal zum Flächenausgleich)

e) w (der Integrand besitzt zwei Extrema)

f) w ($f(1) = 1$)

g) w ($F(-1) < 0$ und $F(1) = 0$)

h) f (F ist für $-\infty < x \leq 1$ sowohl links- als auch rechtsgekrümmt da f unterschiedliches Monotonieverhalten hat)

Bestimmtes Integral und Flächenberechnung

1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\int_2^4 (x^2 + \frac{1}{2}x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_2^4 = \left(\frac{64}{3} + 4\right) - \left(\frac{8}{3} + 1\right) = 21\frac{2}{3}$

b) $\int_1^2 (5 - \frac{2}{x^2})dx = \int_1^2 (5 - 2x^{-2})dx = \left[5x + 2x^{-1}\right]_1^2 = \left(10 + 1\right) - \left(5 + 2\right) = 4$

c) $\int_0^3 \sqrt{x}dx = \int_0^3 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{3}$

d) $\int_1^2 (x^2 + 1)\cdot\sqrt{x}dx = \int_1^2 (x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}})dx = \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \left(\frac{2}{7}\cdot 8\sqrt{2} + \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}\right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{3}\right) =$

$= \frac{76}{21}\sqrt{2} - \frac{20}{21}$

---

2. Bestimmen Sie das bestimmte Integral.

a) $\int_0^3 \sqrt{2x+3}dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 9 - \sqrt{3}$

b) $\int_0^3 6x\cdot\sqrt{x^2+3}dx = \left[3\cdot\frac{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 2\sqrt{12^3} - 2\sqrt{3^3} = 24\sqrt{12} - 6\sqrt{3} = 42\sqrt{3}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x - \pi)dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x - \pi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

d) $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4x+1}}dx = \int_0^1 3\cdot(4x+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{3}{4}\cdot\frac{(4x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}$

e) $\int_0^1 2x \cdot e^{x^2-1} dx = \left[e^{x^2-1}\right]_0^1 = e - é^{-1}$

f) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2e^x} dx$ nicht integrierbar

g) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1)\right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \ln 5$

h) $\int_1^2 \frac{5x}{x^2+1} dx = \left[\frac{5}{2} \ln(x^2+1)\right]_1^2 = \frac{5}{2} \cdot \ln 5 - \frac{5}{2} \ln 2 = \frac{5}{2} \cdot \ln \frac{5}{2}$

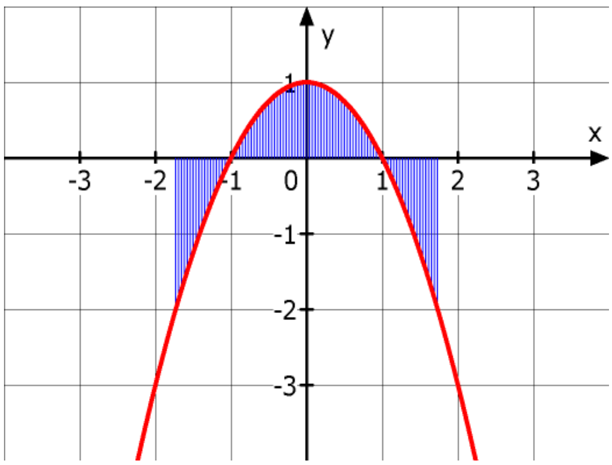
---

3. Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die Gleichung erfüllt ist.

Deuten Sie das Ergebnis jeweils geometrisch!

a) $\int_{-k}^{k} (1-x^2) dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-k}^{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2k - \frac{2}{3}k^3 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad k = 0 \vee k = -\sqrt{3} \vee k = \sqrt{3}$



b) $\int_{-k}^{k} (x^3 - x) dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-k}^{k} = 0$ unabhängig von k.

Der Integrand ist punktsymmetrisch.

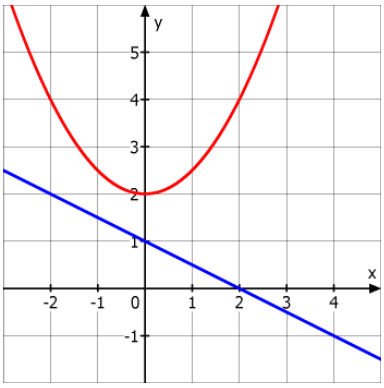
---

4. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen

$f : x \rightarrow 0{,}5x^2 + 2$ und $g : x \rightarrow -0{,}5x + 1$.

Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche zwischen den beiden Graphen und den Geraden $x = -1$ und $x = 2$.

Schraffieren Sie die Fläche im Bild.



Lösung:

Differenz der Funktionsterme: $0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1$

$$\int_{-1}^{2} (0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x \right]_{-1}^{2} = \left(\frac{4}{3} + 1 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 1 \right) = 5\frac{1}{4}$$

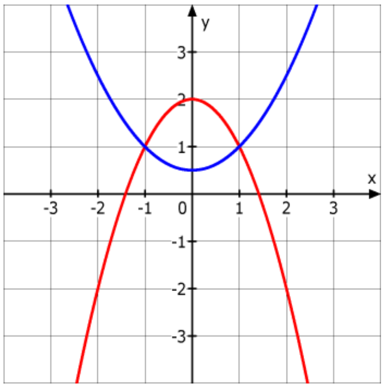
---

5. Die Graphen der Funktionen

$f : x \rightarrow 2 - x^2$ und $g : x \rightarrow 0{,}5x^2 + 0{,}5$.

schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein.

Schraffieren Sie diese Fläche berechnen Sie A.



Lösung:

Schnittstellen: $x = -1$ und $x = 1$

Differenz der Funktionsterme: $\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

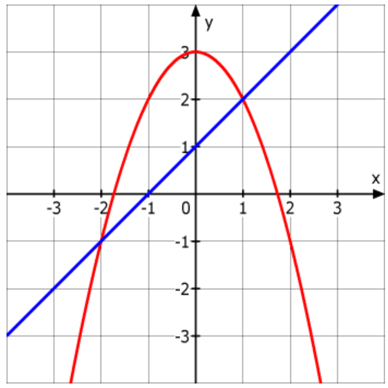
$$\int_{0}^{1} (\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2})dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right]_{0}^{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad A = 2 \cdot 1 = 2$$

---

6. Die abgebildete Parabel und Gerade schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein.

   Bestimmen Sie die Funktionsterme von f und g und die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen.

   Berechne Sie A.



Lösung:

6. Gleichung der Parabel : $y = -x^2+3$

   Gleichung der Geraden : $y = x+1$

   Koordinaten der Schnittpunkte : $S_1\left(-2 \mid 1\right)$ und $S_2\left(1 \mid 2\right)$

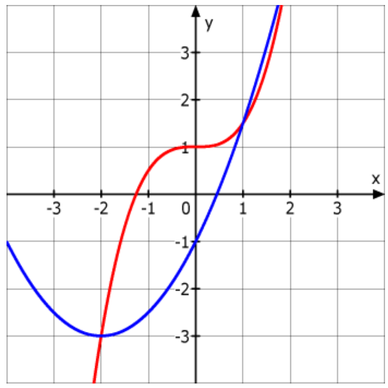
   Differenz der Funktionsterme: $-x^2-x+2$

$$\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(+\frac{8}{3}-2-4\right) = 4\frac{1}{2}$$

---

7. Die Parabel mit dem Scheitel $S\left(-2 \mid -3\right)$ und der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1+0{,}5x^3$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein.

   Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel und die Abszissen der Schnittpunkte und berechnen Sie A.



Lösung:

Parabelgleichung: $y = \frac{1}{2}\cdot(x+2)^2-3$

Differenz der Funktionsgleichungen: $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}(x+2)^2+4$

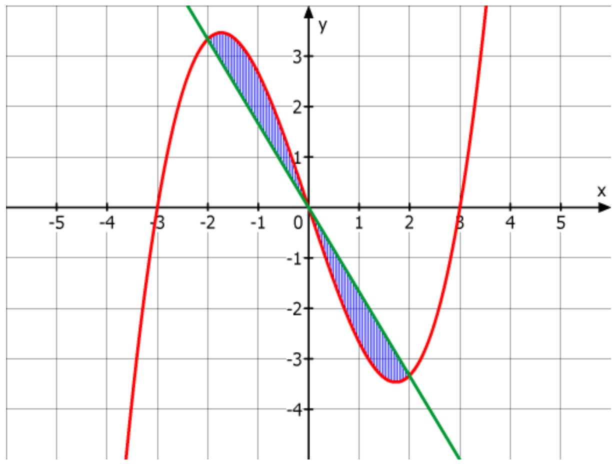
$$\int_{-2}^{1}[\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}(x+2)^2+4]dx = \left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}(x+2)^3+4x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{8}-4{,}5+4\right)-\left(2-8\right) = 5\frac{5}{8}$$

8. Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von f und g miteinander einschließen.

a) $f: x \to \frac{1}{3}x^3 - 3x$ und $g: x \to -\frac{5}{3}x$ b) $f: x \to x\cdot(x-3)^2$ und $g: x \to x$

Lösung:

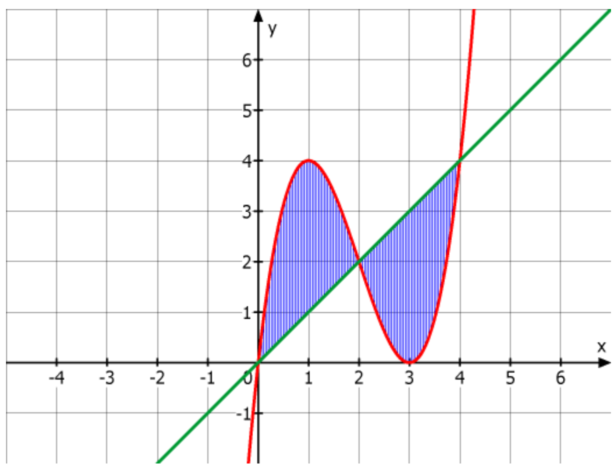
a) Schnittstellen: $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$



Differenz der Funktionsterme : $\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x\right)dx = \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow A = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

b) Schnittstellen: $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4$



Differenz der Funktionsteme : $x\cdot(x-3)^2 - x = x^3 - 6x^2 + 8x$

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad A = 2 \cdot 4 = 8$$

---

9. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3$, $D = \mathbb{R}$.

a) Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie ihren Graphen

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Bestimmen Sie auch das Verhältnis, in dem die schiefe Wendetangente des Graphen von f diese Fläche teilt.

c) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den die schiefe Wendetangente von f mit dem Graphen von f einschließt

---

Lösung:

a) Nullstellen:

$$\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{16}x^3 \cdot (x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 4$$

Monotonie und Extrema:

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 \cdot (x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 3$$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$\frac{1}{4}x^2$	+	+	+
$x-3$	−	−	+
$f'(x)$	−	−	+
	smf	smf	sms

$W_1(0 \mid 0)$ ist ein Terrassenpunkt und $T\left(3 \mid -\frac{27}{16}\right)$ ist ein (globaler) Tiefpunkt.

Krümmungsverhalten und Wendepunkte:

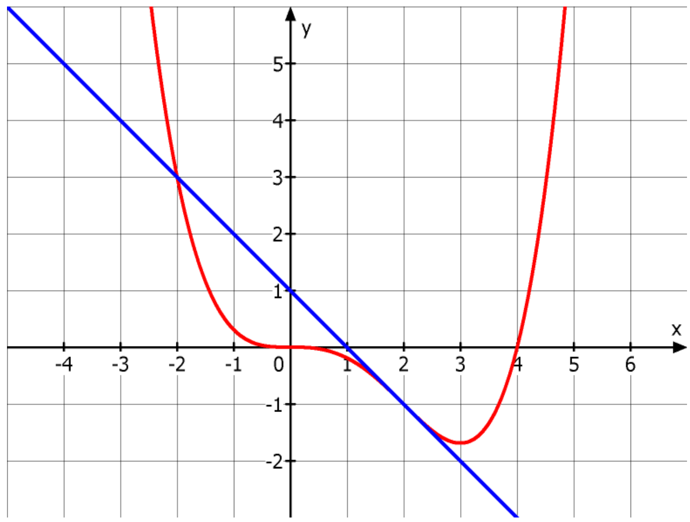
$$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x \cdot (x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 2$$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$\frac{3}{4}x$	−	+	+

$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
	LK	RK	LK

$W_1\big(0 \,|\, 0\big)$ und $W_1\big(2 \,|\, -1\big)$ sind Wendepunkte.

Graph:



b) $\int\limits_0^4 (\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3)dx = \left[\frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{16}x^4\right]_0^4 = -3{,}2 \quad \Rightarrow \quad A = 3{,}2$

Gleichung der Wendetangente:

$f''(2) = \frac{1}{4}\cdot 8 - \frac{3}{4}\cdot 4 = -1$

$w : y = -(x-2)-1 = -x+1$

Schnittstelle von w mit der x-Achse: $x = 1$

$\int\limits_0^2 (\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3)dx = \left[\frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{16}x^4\right]_0^2 = -0{,}6 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0{,}6$

Teilverhältnis (vgl. Graph):

$$\frac{A_1 - A_\Delta}{A - (A_1 - A_\Delta)} = \frac{0{,}6 - 0{,}5}{3{,}2 - 0{,}1} = \frac{1}{31}$$

c) $\int\limits_{-2}^{2} (\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + x - 1)dx = \left[\frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-2}^{2} =$

$$= \left(0{,}4 - 1 + 2 - 2\right) - \left(-0{,}4 - 1 + 2 + 2\right) = -3{,}2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 3{,}2$$

---

10. Für jede reelle Zahl $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch f_a: $x \to -x^2 + (a-2)\cdot x + 2a$.

a) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f_a und der x-Achse begrenzt wird.

b) Für welchen Wert des Parameters a ist der Flächeninhalt gleich 12?

c) Für welchen Wert des Parameters $a \in \left[1;\, 3\right]$ ist der Flächeninhalt maximal?

Wie groß ist dieser maximale Flächeninhalt?

---

10. a) Nullstellen:

$$-x^2 + (a-2)\cdot x + 2a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = a \vee x = -2$$

Lösungsformel für quadrat. Gleichungen:

$$D = (a-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2a = a^2 - 4a + 4 + 8a = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^{2qq}$$

$$x = \frac{-(a-2) - \sqrt{(a+2)^2}}{2\cdot(-1)} = a \vee \frac{-(a-2) + \sqrt{(a+2)^2}}{2\cdot(-1)} = -2$$

$$\int_{-2}^{a} [-x^2 + (a-2)\cdot x + 2a)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + (a-2)\cdot\frac{1}{2}x^2 + 2ax\right]_{-2}^{a} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}a^3 + (a-2)\cdot\frac{1}{2}a^2 + 2a^2\right) - \left(\frac{8}{3} + (a-2)\cdot 2 - 4a\right) = \frac{1}{6}a^3 + a^2 + 2a + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{6}a^3 + a^2 + 2a + \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad A(a) = \frac{1}{6}a^3 + a^2 + 2a + \frac{4}{3}$$

b) Lösung nur

c) $A'(a) = \frac{1}{2}a^2 + 2a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 < 0$

Randextrema: $A(1) = 4\frac{1}{2}$ und $A(3) = 20\frac{5}{6}$

Abituraufgaben

==

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \to \sin 2x$.

   a) Geben Sie zwei benachbarte Nullstellen von f an.

   b) Berechnen Sie den Wert des unbestimmten Integrals $\int_0^2 f(x)dx$

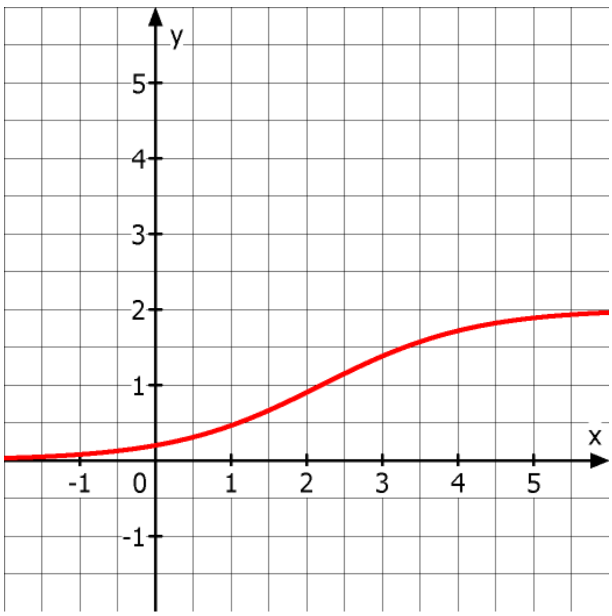
   Warum stimmt der Wert dieses Integrals nicht mit dem Inhalt der Fläche überein, die für $0 \le x \le 2$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt?

Lösung:

a) $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_0^2 \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos 2x \right]_0^2 = -\frac{1}{2}\cos 4 + \frac{1}{2} \approx$

2. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{2e^x}{e^x + 9}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



   a) Zeigen Sie rechnerisch, dass G_f nur einen Koordinatenschnittpunkt S besitzt und geben Sie die Koordinaten von S an.

b) Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms von f, dass $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$ gilt.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f in $\mathbb{R}$ streng monoton steigt.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Achsenschnittpunkt S.

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 4$ einschließt.

f) Begründen Sie, dass f in $\mathbb{R}$ umkehrbar ist. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} an und zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in die obige Abbildung ein.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Alba lässt sich modellhaft mithilfe der Funktion f beschreiben.

Beginnt man die Beobachtung zwei Wochen nach der Auskeimung einer Sonnenblume dieser Sorte, so liefert $f(x)$ für $x \in [0; 4]$ im Modell die Höhe der Blume in Metern. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten.

In den Aufgaben g) bis j) werden ausschließlich Sonnenblumen der Sorte Alba betrachtet.

g) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, um wie viele Zentimeter eine Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate nach Beobachtungsbeginn wächst.

h) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, wie viele Monate nach Beobachtungsbeginn eine Sonnenblume eine Höhe von 1,5 Metern erreicht.

Beschreiben Sie, wie man den berechneten Wert graphisch überprüfen kann.

i) Im Modell gibt es einen Zeitpunkt x_M, zu dem die Blumen am schnellsten wachsen.

bestimmen Sie mithilfe von Abbildung einen Näherungswert für x_M. Ermitteln Sie anschließend einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate in Zentimetern pro Tag.

j) Ein Biologe nimmt an, dass sich das Wachstum der Blumen vor Beobachtungsbeginn näherungsweise durch die Gleichung der Tangente aus Aufgabe d) beschreiben lässt.

Untersuchen Sie mithilfe einer Rechnung, ob diese Annahme damit in Einklang steht, dass vom Zeitpunkt des Auskeimens bis zum Beobachtungsbeginn etwa zwei Wochen vergehen.

Haben zu Beobachtungsbeginn Sonnenblumen der Sorte Tramonto die gleiche Höhe wie Sonnenblumen der Sorte Alba, so erreichen von da an die Sonnenblumen der Sorte Tramonto im Vergleich zu denen der Sorte Alba jede Höhe in der Hälfte der Zeit.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Tramonto lässt sich modellhaft mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g beschreiben, die eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $k \in \mathbb{R}$ besitzt:

I $\quad y = \dfrac{2e^{x+k}}{e^{x+k}+9}$ $\qquad$ **II** $\quad y = k \cdot \dfrac{2e^{x}}{e^{x}+9}$ $\qquad$ **III** $\quad y = \dfrac{2e^{kx}}{e^{kx}+9}$

Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten und y ein Näherungswert für die Höhe einer Blume in Metern.

k) Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.

l) Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Geben Sie den passenden Wert von k an.

Lösung:

a) Schnittpunkt mit der x-Achse : $f(x) = \dfrac{2e^{x}}{e^{x}+9} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{x} = 0$

Keine Lösung!

Schnittpunkt mit der y-Achse : $f(0) = \dfrac{2 \cdot e^{0}}{e^{0}+9} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$ ergibt $S\left(0 \mid 0{,}2\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 \cdot e^{x}}{e^{x}+9} = 0+0$ da $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0+0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 \cdot e^{x}}{e^{x}+9} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{1+\frac{9}{e^{x}}} = 2$ da $\lim\limits_{x \to \infty} e^{x} = \infty$

c) $f'(x) = \dfrac{2e^{x} \cdot (e^{x}+9) - 2e^{x} \cdot e^{x}}{(e^{x}+9)^{2}} = \dfrac{18e^{x}}{(e^{x}+9)^{2}} > 0$

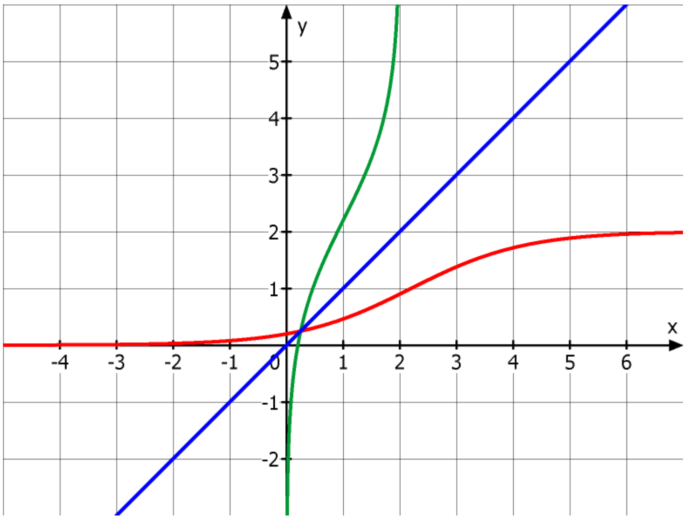
Die in ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion ist daher streng monoton zunehmend.

d) $f'(0) = 0{,}18$ und damit $t: y = 0{,}18x + 0{,}2$

e) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{2e^{x}}{e^{x}+9}\,dx = \Big[2 \cdot \ln(e^{x}+9)\Big]_{0}^{4} = 2 \cdot \ln 25 - 2 \cdot \ln 10 = 2 \cdot \ln 2{,}5$

f) Als streng monoton zunehmende Funktion ist f umkehrbar.

$D_{f^{-1}} = W_f =]0; 2[$ und $W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$

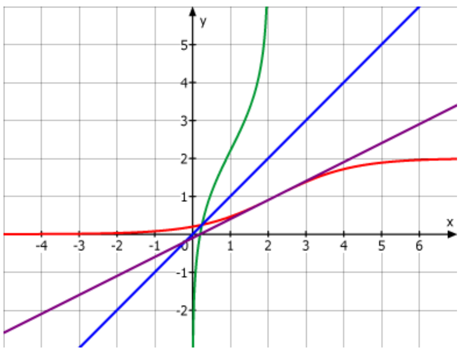


g) $f(2) = \dfrac{2 \cdot e^2}{e^2 + 9} \approx 0{,}45\,(\text{m})$

h) $\dfrac{2 \cdot e^x}{e^x + 9} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot e^x = 1{,}5 \cdot e^x + 13{,}5 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 \cdot e^x = 13{,}5 \quad \Rightarrow \quad e^x = 27$

$x = \ln 27 = 3 \cdot \ln 3 \approx 3{,}3\,(\text{Monate})$

i) $x_M \approx 2{,}2$ und $0{,}1{,}67\ \dfrac{\text{cm}}{\text{d}}$



j) $y = 0{,}18x + 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \approx 1{,}05 \neq 2$

k) Gleichung I und II beschreiben für $k \neq 1$ Sonnenblumen mit einer Ausgangshöhe, die verschieden von 20 cm ist.

l) $k = 2$

---

3. a) Warum hat jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle?

b) Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f an, so dass die $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \to \int_{-1}^{x} f(t)dt$ genau zwei Nullstellen besitzt.

Geben Sie die Nullstellen von F an.

Lösung:

a) Jede Integralfunktion besitzt die untere Intgrationgrenze als Nullstelle.

b) Ist $f(x) = x$, dann hat F die Nullstellen -1 und 1.
