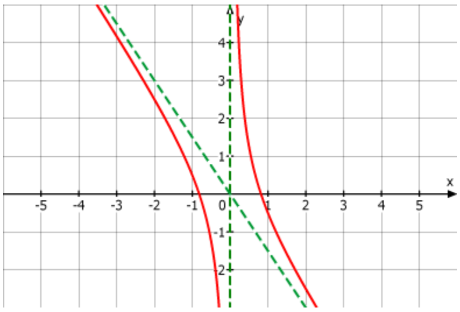
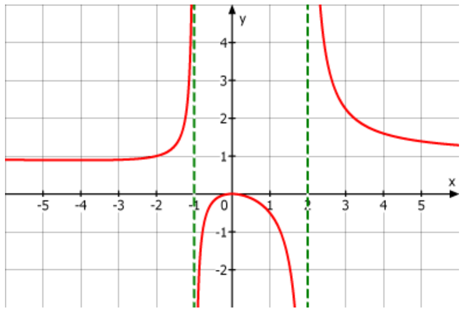
Übungsblatt

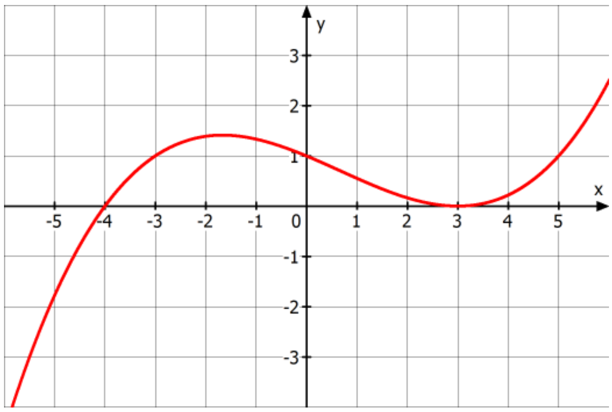
---

1. Bestimme eine mögliche Funktionsgleichung der Funktion mit dem gezeichneten Graphen

a) 

b) 

---

2. 

Die Zeichnung zeigt den Graphen der Ableitung f' einer Funktion f. Entscheiden Sie , ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Aussagen!

a) Der Graph von f hat an der Stelle $x = 3$ einen Tiefpunkt.

b) Die Tangente im Punkt $P\left(1 \mid f(1)\right)$ an den Graphen von f ist parallel zur Geraden

$y = -x + 1$

c) Die Funktion besitzt ein globales Minimum.

---

3. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \dfrac{5x^2}{x^2 + x + a}$ besitzt an der Stelle $x = 2$ eine waagrechte Tangente.

Bestimmen Sie a.

---

4. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$ mit der maximalen Defintionsmenge D.

a) Geben Sie D und die Nullstellen von f an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Defintionsbereichs. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von f an.

c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie Art und Lage des Extremums von f. $\left[\text{Zwischenergebnis}: f'(x) = \frac{8-2x}{(x-1)^3}\right]$

d) Die Tangente und Normale im Schnittpunkt von G mit der positiven x-Achse schließen mit der y-Achse ein Dreieck ein. Berechnen Sie dessen Inhalt.

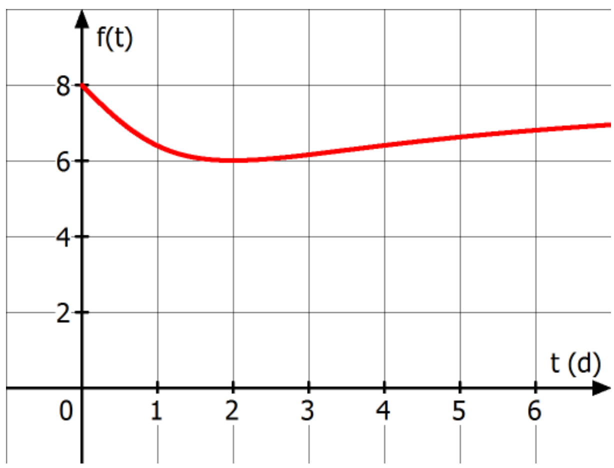
---

5. Unmittelbar nach der einmaligen, kurzzeitigen Einleitung von Abwasser in einen See kommt es zu einem Absinken des Sauerstoffgehalts im See.

Die Abwasserbelastung nicht zu hoch ist, führt die Selbsreinigung des Sees schließlich wieder zu einer Erhöhung des Sauerstoffgehalts.

Die Funktion $f: t \rightarrow 8 - \frac{8t}{t^2+4}$ beschreibt näherungsweise den Sauerstoffgehalt des Sees an der Einleitungsstelle.

Dabei ist t die Anzahl der Tage nach der Einleitung des Abwassers und f(t) der Sauerstoffgehalt in $\frac{\text{mg}}{\text{Liter}}$. Das Bild zeigt den Graph von f.



a) Nach wie vielen Tagen erreicht der Sauerstoffgehalt seinen kleinsten Wert und wie hoch ist dieser ?

b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = f(0)$ ist und deuten Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang.

Lösung von Aufgabe 4

==

a) $D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \vee x = 2$ mit der maximalen

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1.$

Waagrechte Asymptote $y = 1$

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \frac{x^2-4}{(x-1)^2} = -\infty$ und damit $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} \frac{x^2-4}{(x-1)^2} = -\infty$

Senkrechte Asymptote: $x = 1$

c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie Art und Lage des Extremums von f. $\left[\text{Zwischenergebnis}: f'(x) = \frac{8-2x}{(x-1)^3}\right]$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

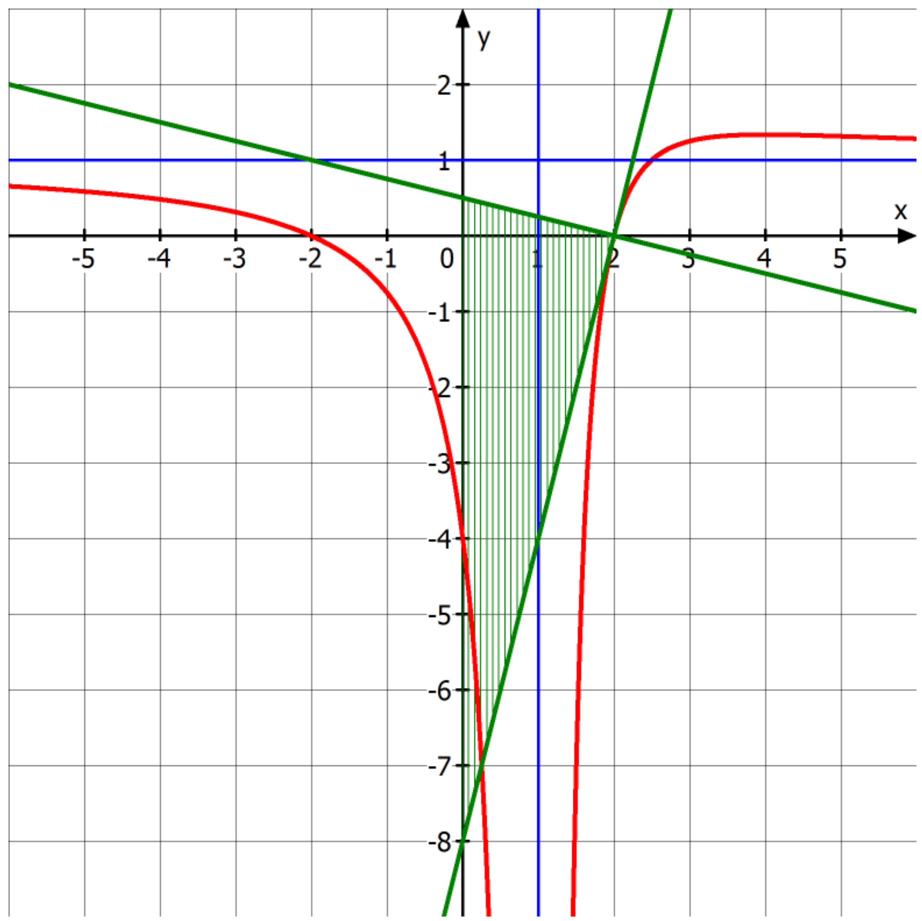
	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 4$	$4 < x < \infty$
$8-2x$	+	+	−
$(x-1)^3$	−	+	+
	−	−	−
	smf	sms	smf

Monotonieintervalle angeben:

$E\left(4 \mid \frac{4}{3}\right)$ ist ein Hochpunkt.

d) Tangente: $y = 4x-8$ Normale: $y = -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2}\cdot(8+\frac{1}{2})\cdot 2 = 8\frac{1}{2}$



y
x
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5