

7. Testen von Hypothesen

15.1 Alternativtest

Von einer Urne sei bekannt, dass sie entweder

- a) 4 rote und 6 weiße Kugeln
- b) 7 rote und 3 weiße Kugeln enthält.

Um zu entscheiden, welchen Inhalt die Urne hat, werden der Urne nacheinander 5 Kugeln mit Zurücklegen entnommen und ihre Farben notiert.

Man spricht von einer Stichprobe der Länge 5.

Nullhypothese H_0 :

Es sind 4 rote Kugeln in der Urne d.h. die W'keit eine rote Kugel zu ziehen ist gleich 0,4.

Man schreibt kurz : $H_0 : p = p_0 = 0,4$

Gegenhypothese H_1 :

Es sind 7 rote Kugeln in der Urne d.h. die W'keit eine rote Kugel zu ziehen ist gleich 0,7.

Man schreibt kurz : $H_1 : p = p_1 = 0,7$

Der Wert, den die Zufallsgröße

X : Anzahl der gezogenen roten Kugeln,

annimmt soll darüber entscheiden, welche Hypothese angenommen wird.

Es ist $W_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Werden wenig rote Kugeln gezogen, dann ist es sinnvoll anzunehmen, dass die Urne nur 3 rote Kugeln enthält und die Nullhypothese zu akzeptieren. Werden viele rote Kugeln gezogen lehnt man sie ab.

Man definiert den *Annahmebereich* von H_0 als $\mathbb{A} = \{0, 1, 2\}$

d. h. ist $X \in \mathbb{A}$, dann wird H_0 angenommen.

Als **Ablehnungsbereich** von H_0 definiert man $\overline{A} = \{3, 4, 5\}$

d. h. ist $X \in \overline{A}$, dann wird H_0 abgelehnt.

Als Ergebnis des Tests ist dann möglich :

	H_0 wird angenommen	H_0 wird abgelehnt
H_0 ist wahr d.h. $p = 0,4$	richtig	falsch (Fehler 1. Art)
H_1 ist wahr d.h. $p = 0,7$	falsch (Fehler 2. Art)	richtig

Die Wahrscheinlichkeit, dass man den Fehler 1. Art begeht bezeichnet man mit α und den Fehler 2. Art mit β . Es ist

$$\alpha = P_{p=0,4}(X \in \overline{A}) = P_{0,4}(X \geq 3) = 1 - P_{0,4}(X \leq 2) = 1 - F_{0,4}^5(2) \approx 0,317 = 31,7\%$$

$1 - \alpha \approx 68,3\%$ heißt **Sicherheitswahrscheinlichkeit** des Tests.

Für den Fehler 2. Art gilt

$$\beta = P_{p=0,7}(X \in A) = P_{0,7}(X \leq 2) = F_{0,7}^5(2) \approx 16,3\%$$

Alternativer Hypothesentest:

1. Aufstellen der **Nullhypothese**

2. Festlegung von **Annahmebereich A** und **Ablehnungsbereich \overline{A}**

3. a) **Fehler 1. Art** oder **Signifikanzniveau** :

Obwohl die Nullhypothese stimmt, wird sie abgelehnt $\alpha = P_{p=p_0}(X \in \overline{A})$

b) **Fehler 2. Art** :

Obwohl die Nullhypothese nicht stimmt, wird sie angenommen $\beta = P_{p=p_1}(X \in A)$

Ein Test mit einem Fehler 1. Art von höchstens 5% bzw. 1% heißt *signifikant* bzw. *hochsignifikant*.

Tests mit $\alpha = 0,1\%$ heißen höchstsignifikant.

Bemerkungen:

a) Der Fehler 1. Art kann durch Vergrößern des Annahmebereichs verkleinert werden.

Allerdings erhöht sich dann der Fehler 2. Art.

b) Der Fehler 2. Art kann durch Verkleinern des Annahmebereichs verkleinert werden.

Allerdings erhöht sich dann der Fehler 1. Art.

c) Durch Vergrößern der *Stichprobenlänge* lassen sich beide Fehler verkleinern

Für obiges Beispiel ergibt dann :

a) Wählt man für das Einführungsbeispiel $\mathbb{A} = \{0, 1, 2, 3\}$, dann ergibt sich

$$\alpha = P_{p=0,4}(X > 3) = 1 - P_{0,4}(X \leq 3) = 1 - F_{0,4}^5(3) \approx 0,087 = 8,7 \%$$

$$\beta = P_{p=0,7}(X \leq 3) = F_{0,7}^5(3) \approx 0,472 = 47,2 \%$$

b) Wählt man dagegen $\mathbb{A} = \{0, 1\}$, dann ergibt sich

$$\alpha = P_{p=0,4}(X > 1) = 1 - P_{p=0,4}(X \leq 1) = 1 - F_{0,4}^5(1) \approx 0,663 = 66,3 \%$$

$$\beta = P_{p=0,7}(X \leq 1) = F_{0,7}^5(1) \approx 0,031 = 3,1 \%$$

c) Wählt man als Stichprobenlänge $n = 20$ und

$$\mathbb{A} = \{0, 1, 2, \dots, 10, 11\} = [1; 11] \text{ bzw. } \bar{\mathbb{A}} = \{12, 13, 14, 15, \dots, 20\} = [12; 20]$$

$$\alpha = P_{p=0,4}(X > 11) = 1 - P_{p=0,4}(X \leq 10) = 1 - F_{0,4}^{20}(11) \approx 0,057 = 5,7\%$$

$$\beta = P_{p=0,7}(X \leq 11) = F_{0,7}^{20}(11) \approx 0,113 = 11,3 \%$$

7.2 Einseitiger Hypothesentest

Beispiel:

Ein Biologe, behauptet ein Mittel entdeckt zu haben, dass die Geburt weiblicher Kälber ($p_0 = 50\%$) wahrscheinlicher macht. Das Mittel wird 10 Kühen verabreicht.

Die Nullhypothese geht davon aus, dass sich diese Wahrscheinlichkeit nicht geändert hat.

$$H_0 : p = 0,5$$

Die Gegenhypothese lässt sich in Form einer Ungleichung angeben. Sie lautet

$$H_1 : p > 0,5$$

Als Annahme bzw. Ablehnungsbereich wird

$$\mathbb{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ bzw. } \bar{\mathbb{A}} = \{7, 8, 9, 10\} \text{ gewählt.}$$

Der Fehler 1. Art :

$$\alpha = P_{p=0,5}(X > 6) = 1 - P_{p=0,5}(X \leq 6) = 1 - F_{0,5}^{10}(6) \approx 0,17 = 17 \%$$

Der große Fehler 2. Art ergibt sich im Fall $p \rightarrow p_0$ d.h. die Erhöhung der Wahrscheinlichkeit für die Geburt weiblicher Kälber ist infinitesimal klein. Es ist dann

$$\beta = \lim_{p \rightarrow p_0} \left[P_p(X \leq 6) \right] = P_{0,5}(X \leq 6) = 1 - \alpha \approx 83 \%$$

Bei einem *einseitigen Test* liegt der Ablehnungsbereich "auf einer Seite" des Annahmebereichs. Man unterscheidet zwischen rechtsseitigen und linksseitigen Hypothesentests je nachdem, auf welcher Seite des Annahmebereichs der Ablehnungsbereich liegt.

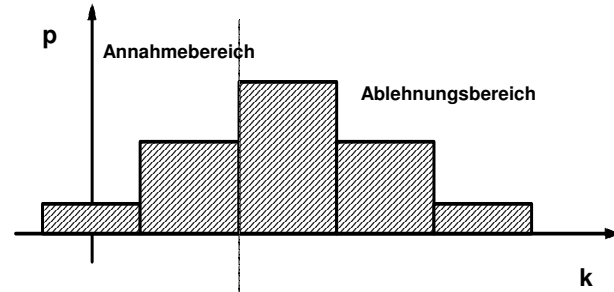
Beim *rechtsseitigen Hypothesentest*

(Stichprobenlänge n) gilt :

$$H_0 : p \leq p_0$$

und

$$\mathbb{A} = \{0; 1; \dots; g\}, g \leq n$$



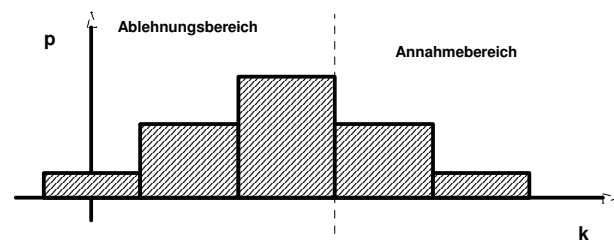
Beim *linksseitigen Hypothesentest*

(Stichprobenlänge n) gilt :

$$H_0 : p \geq p_0$$

und

$$\mathbb{A} = \{g + 1; \dots; n\}, g \geq 0$$



Ist bei einem Test die Gegenhypothese nicht scharf festgelegt (man spricht dann auch von einer *zusammengesetzten Gegenhypothese*), dann ist der Fehler 2. Art nicht exakt angebar.

Ist die Hypothese $H_0 : p \leq p_0$ bzw. $H_0 : p \geq p_0$

und hat die die Gegenhypothese die Form

$$H_1 : p > p_0 \text{ bzw. } H_1 : p < p_0$$

und stoßen \mathbb{A} und $\overline{\mathbb{A}}$ aneinander, dann ist $1 - \alpha$ die kleinste obere Schranke für den Fehler 2. Art.

Ist auch die Nullhypothese nicht scharf festgelegt, dann lässt sich auch der Fehler 1. Art nur nach oben abschätzen. Man spricht analog von einer *zusammengesetzten Nullhypothese*.

7.3 Bestimmung des Annahme- und Ablehnungsbereiches

Beispiel:

Nullhypothese $H_0 : p = p_0 = 0,25$

Gegenhypothese $H_0 : p > p_0 = 0,25$

Stichprobenlänge $n = 20$

Bestimme \mathbb{A} so, dass $\alpha \leq 0,05$ ist, und der Fehler 2. Art möglichst gering ist.

Ansatz:

Annahmehereich $\mathbb{A} = \{0; \dots; k\}$

Ablehnungsbereich $\bar{\mathbb{A}} = \{k+1; \dots; 20\}$

Stichprobenlänge $n = 20$

Bedingung:

$$P_{p=0,25}(X > k) \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P_{p=0,25}(X \leq k) \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad P_{p=0,25}(X \leq k) \geq 0,95$$

$$F_{0,25}^{20}(k) \geq 0,95 \quad \Rightarrow \quad k \geq 8$$

Den Wert entnimmt man der Stochastiktafel.

Damit der Fehler zweiter Art möglichst gering ist, muss k minimal gewählt werden.

Also ist $\mathbb{A} = \{0; \dots; 8\}$ und $\bar{\mathbb{A}} = \{k+1; \dots; 20\}$ zu nehmen.

Beispiel:

Nullhypothese $H_0 : p = p_0 = 0,25$

Gegenhypothese $H_0 : p < p_0 = 0,25$

Stichprobenlänge $n = 20$

Bestimme \mathbb{A} so, dass $\alpha \leq 0,05$ ist und der Fehler 2. Art möglichst gering ist.

Ansatz:

$$\text{Annahmebereich} \quad \mathcal{A} = \{k+1; \dots; 20\}$$

$$\text{Ablehnungsbereich} \quad \overline{\mathcal{A}} = \{0; \dots; k\}$$

$$\text{Stichprobenlänge} \quad n = 20$$

Bedingung:

$$P_{p=0,25}(X \leq k) \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad F_{0,25}^{20}(k) \leq 0,05 \quad \Rightarrow \quad k \leq 1$$

$$F_{0,25}^{20}(k) \geq 0,95 \quad \Rightarrow \quad k \geq 8$$

Den Wert entnimmt man der Stochastiktafel.

Damit der Fehler zweiter Art möglichst gering ist, muss k minimal gewählt werden.

Also ist $\mathcal{A} = \{2; \dots; 20\}$ und $\overline{\mathcal{A}} = \{0; 1\}$ zu nehmen.

Die Wahl der Nullhypothese hängt vom jeweiligen Standpunkt ab.

Beispiel:

Ein Werbeagentur wird von Hersteller eines relativ unbekanntes Produktes damit beauftragt den Bekanntheitsgrad des Produktes auf über 40% zu steigern.

Die Effektivität der Kampagne soll nach ihrem Abschluss durch Befragung von 100 Personen getestet werden und über die Zahlung einer Erfolgsprämie entscheiden.

- a) Welche Standpunkte können für diesen Hypothesentest eingenommen werden?
- b) Bestimme für beide Standpunkte Annahme- und Ablehnungsbereich für ein Signifikanzniveau von 5%.
- b) Bestimme die W'keit für einen Fehler 2. Art, falls der der Bekanntheitsgrad bei 35 % bzw. 45 % liegt.

	Hersteller	Werbeagentur
Nullhypothese	$H_0 : p \leq p_0 = 0,40$	$H_0 : p > p_0 = 0,40$
Gegenhypothese	$H_1 : p > p_0 = 0,40$	$H_1 : p \leq p_0 = 0,40$
Annahmebereich	$\mathbb{A} = \{0; \dots; k\}$	$\mathbb{A} = \{k + 1; \dots; 100\}$
Ablehnungsbereich	$\overline{\mathbb{A}} = \{k + 1; \dots; 100\}$	$\overline{\mathbb{A}} = \{0; \dots; k\}$

Bedingung des Herstellers:

$$\alpha = P_{p=0,4}(X \geq k + 1) \leq 0,05 \Leftrightarrow 1 - P_{p=0,4}(X \leq k) \leq 0,05 \Leftrightarrow P_{p=0,4}(X \leq k) \geq 0,95$$

$$F_{0,4}^{100}(k) \geq 0,95 \Rightarrow k \geq 48$$

Bedingung der Werbeagentur:

$$\alpha = P_{p=0,4}(X \leq k) \leq 0,05 \Leftrightarrow F_{0,4}^{100}(k) \leq 0,05 \Rightarrow k \leq 31$$

	Hersteller	Werbeagentur
Annahmebereich	$\mathbb{A} = \{0; \dots; 48\}$	$\mathbb{A} = \{32; \dots; 100\}$
Ablehnungsbereich	$\overline{\mathbb{A}} = \{49; \dots; 100\}$	$\overline{\mathbb{A}} = \{0; \dots; 31\}$
Fehler 2. Art	$\beta \approx 76\%$	$\beta \approx 23\%$

Der Hersteller ist nicht daran interessiert, ungerechtfertigt eine Prämie zu bezahlen, während die Werbeagentur daran interessiert ist, die Prämie zu erhalten.
