4. Zufallsgrößen

===

4.1 Zufallsgrößen und ihr Erwartungswert

Beispiel :

Experiment : Dreimaliges Werfen einer Münze

Ergebnismenge: $\Omega = \{ZZZ, ZZK, ZKZ, KZZ, ZKK, KZK, KKZ, KKK\}$

Zufallsgröße: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X : \omega \to$ Anzahl der geworfenen K`s

Wertetabelle von X :

ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$x = X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

d.h. die Wertemenge von X ist $W_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

Jeder Wert x von X wird mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ angenommen.
Aus obiger Tabelle ergibt sich

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Die mittlere Anzahl der K's pro Versuch ergibt sich zu $0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$ und heißt Erwartungswert von X.

Sei Ω die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments. Eine Funktion, die jedem Ergebnis eine reelle Zahl zuordnet heißt eine **Zufallsgröße** auf Ω.

Ist W_X die Wertemenge von X und $x \in W_X$, dann ist $P(X = x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße A den Wert x annimmt.

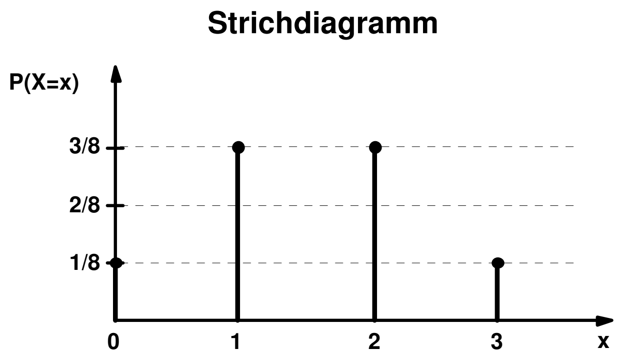
Ist $W_X = \left\{ x_1;\ x_2:\ ....;\ x_m \right\}$ die Wertemenge von X, dann heißt

$$\boxed{\mathbf{E(X)} = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + ... + x_m \cdot P(X = x_m)}$$

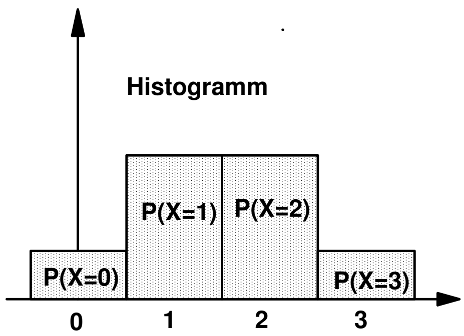
Erwartungswert der Zufallsgröße X.

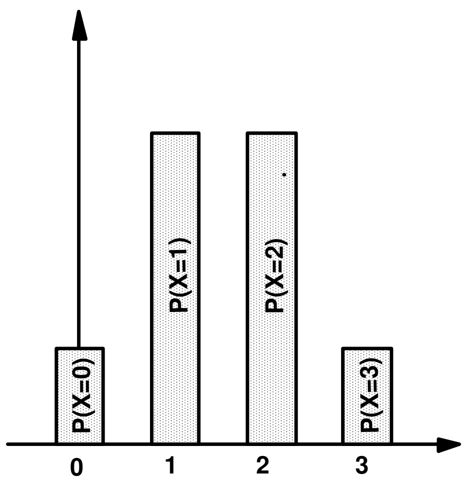
Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße :

1. ***Strichdiagramm***



2. ***Histogramme***





1.2 Die Verteilungsfunktion

Beispiel :

Experiment: Einmaliges Werfen zweier L-Würfel

Zufallsgröße X: Augensumme

Wahrscheinlichkeitsverteilung :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$P(X \le x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Die Wahrscheinlichkeit $P(X \le 5)$, dass die gewürfelte Augensumme höchstens 5 ist, dann gegeben durch

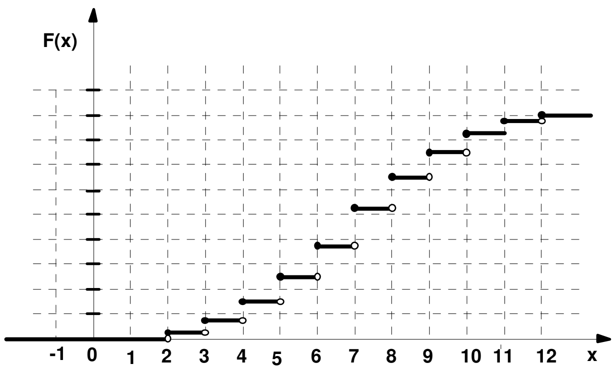
$$P(4 \le X \le 7) = P\left(X \le 7\right) - P\left(X \le 3\right) = \frac{21}{36} - \frac{3}{36} = \frac{1}{2}.$$

Sei X eine auf der Ergebnismenge Ω definierte Zufallsgröße. Dann heißt die Funktion

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbf{F : x \to F(x) = P(X \le x)}$

die ***Verteilungsfunktion*** der Zufallsgröße X.

Graph der Verteilungsfunktion des Beispiels :



1.3 Varianz und Streuung

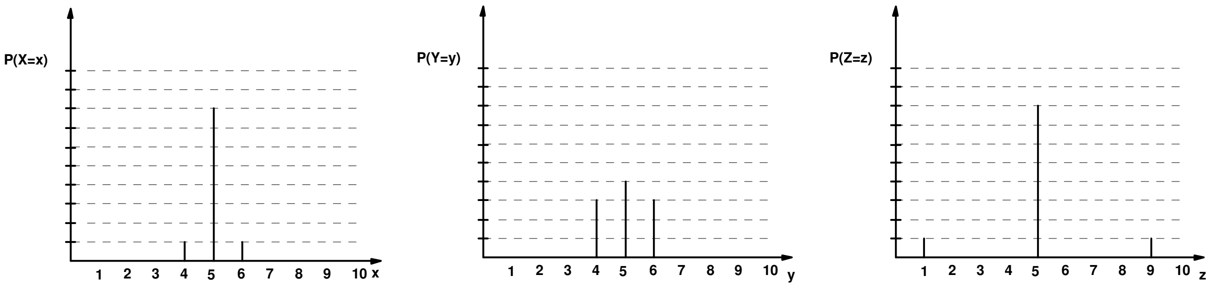
Gegeben seien die Zufallsvariablen X, Y und Z mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen

x	4	5	6
P(X = x)	0,1	0,8	0,1

y	4	5	6
P(Y = y)	0,3	0,4	0,3

z	1	5	8
P(Z = z)	0,1	0,8	0,1

Strichdiagramme :



Aufgrund der Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsverteilungen haben alle drei Zufallsgrößen den gleichen Erwartungswert 6.

Trotzdem ist bei der Ausführung der zugehörigen Experimente die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung vom Erwartungswert bei den Zufallsgrößen Y und Z größer als bei der Zufallsgröße X.

Diese Verschiedenartigkeit der Verteilungen charakterisiert man durch die ***Varianz*** einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

X sei eine Zufallsgröße mit dem

Erwartungswert $\mu = E(X)$ und der Wertemenge $W_X = \left\{ x_1; x_2; ....; x_m \right\}$

Dann nennt man

$$\boxed{Var(X) = (\mu - x_1)^2 \cdot P(X = x_1) + (\mu - x_2)^2 \cdot P(X = x_2) + ... + (\mu - x_m)^2 \cdot P(X = x_m)}$$

die Varianz und

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma = \sqrt{Var(X)}}}$$

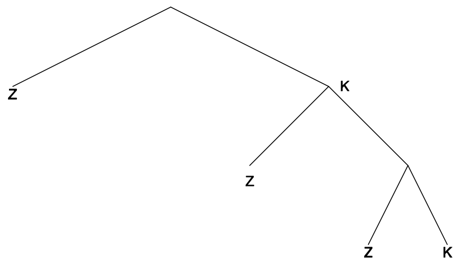
die **Standardabweichung** (**Streuung**) von X.

Aufgabe in der Handreichung

Eine Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal Wappen erscheint, jedoch höchstens dreimal. Die Anzahl der Würfe bis zum Spielende sei die Zufallsgröße A.

Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von A.

Lösung



Wahrscheinlichkeitsverteilung von A

a	1	2	3
$P(A = a)$	0,5	0,25	0,25

$E(A) \ = \ 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}25 \ = \ 1{,}75$

$Var(A) \ = \ (1-1{,}75)^2 \cdot 0{,}5 \ + \ (2-1{,}75)^2 \cdot 0{,}25 \ + \ (3-1{,}75)^2 \cdot 0{,}25 \ = \ 0{,}375$

$\sigma \ = \ \sqrt{3{,}75} \ = \ 0{,}5 \cdot \sqrt{15}$

Aufgabe in der Handreichung

Eine Zufallsgröße kann 5 unterschiedliche Werte annehmen.

Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an, so dass der Erwartungswert zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Wert der Zufallsgröße liegt.

Lösung

Sei $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$.

Man zeigt, dass eine Verteilung

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P(X = x_i)$	a	a	b	b	b

mit $2a + 3b = 1$ und $E(X) = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ möglich ist.

$$x_1 \cdot a + x_2 \cdot a + x_3 \cdot b + x_4 \cdot b + x_5 \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$$

$$a \cdot (x_1 + x_2) + b \cdot (x_3 + x_4 + x_5) = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$$

$$a \cdot (x_1 + x_2) + \frac{1 - 2a}{3} \cdot (x_3 + x_4 + x_5) = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$$

$$3a \cdot (x_1 + x_2) - 2a \cdot (x_3 + x_4 + x_5) = \frac{3}{2} \cdot (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4 + x_5)$$

$$3a \cdot (x_1 + x_2) - 2a \cdot (x_3 + x_4 + x_5) = \frac{\frac{3}{2} \cdot (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4 + x_5)}{3(x_1 + x_2) - 2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5) - 3 \cdot (x_1 + x_2)}{4 \cdot (x_3 + x_4 + x_5) - 6 \cdot (x_1 + x_2)}$$

Aufgabe in der Handreichung

GEWINNPLAN

10	x	€ 250.000,-
20	x	€ 50.000,-
20	x	€ 10.000,-
100	x	€ 5.000,-
150	x	€ 1.000,-
500	x	€ 500,-
1.000	x	€ 100,-
10.400	x	€ 50,-
240.000	x	€ 10,-
480.000	x	€ 5,-
1.920.000	x	€ 2,-
12.720.000	x	€ 1,-

SOFORTIGER GEWINNENTSCHEID

WICHTIGE HINWEISE

Die Staatliche Bayerische Losbrieflotterie ist vom Bayerischen Staatsministerium der Finanzen genehmigt. Sie gelangt in einer Gesamtauflage von 60.000.000 Losbriefen à € 1,–, unterteilt in 10 gleiche Teilserien, zur Ausgabe. Die Losbriefe werden nur in Bayern über zugelassene Stellen verkauft.

Jeder Losbrief enthält Serienbezeichnung, den Verfallstermin der Gewinne und den Entscheid, ob es sich um ein Gewinn- oder Nietenlos handelt oder ob das Los für die Ziehung der Kandidaten zum Fernsehgewinnspiel teilnahmeberechtigt ist.

Die Auszahlung der Gewinne erfolgt nur bis zum Verfalltermin gegen Rückgabe der Originallose, deren Gewinnentscheid und Serienbezeichnung unversehrt sein müssen.

Die Gewinne werden von den Vertriebsorganen der Staatlichen Lotterieverwaltung ausbezahlt. Gewinne ab € 2.500,– sind bei der Staatl. Lotterieverwaltung, Karolinenplatz 4, 80333 München (Postfach 201953, 80019 München), persönlich oder durch eingeschriebenen Brief geltend zu machen. Die Auszahlung kann mit befreiender Wirkung an jeden Inhaber oder Einsender des Original-Gewinnloses erfolgen. Eine Verpflichtung, die Berechtigung des Inhabers oder Einsenders zu prüfen, besteht nicht.

Die Abbildung zeigt den Gewinnplan des Gewinnspiels"Bayernlos" mit zusätzlichen Hinweisen, die sich auf jedem Los finden. Im mathematischen Sinn handelt es sich bei diesem Gewinnplan um einen Auszahlungsplan; bei einer Auszahlung von z. B. 10 € und einem Lospreis von 1 € beträgt der Reingewinn des Spielers 9 €.

a) Zeigen Sie, dass die W'keit für einen "Hauptgewinn" (250000 €) beim Bayernlos größer ist als die Wahrscheinlichkeit für "6 Richtige" im Lotto "6 aus 49".

   Kann man allein aus dieser Information ableiten, dass es besser ist, Bayernlose zu kaufen, als im Lotto zu spielen? Erläutern Sie Ihre Antwort.

b) Erklären Sie, wie man aus den in den Abbildungen gegebenen Informationen den Erwartungswert der Zufallsgröße "Reingewinn für den Spieler" beim Ziehen eines Bayernloses berechnen kann, wenn man davon ausgeht, dass alle Lose einer Auflage verkauft werden.

c) Auf Plakaten an Losständen des Gewinnspiels"Bayernlos" ist zu lesen, dass in jeder vollständig verkauften Auflage etwa 27 Millionen Euro an die Spieler ausgezahlt werden.

Bestätigen Sie mithilfe dieser Information nachvollziehbar, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße Reingewinn $-0{,}55$ € ist.

Erklären Sie einem stochastischen Laien, was dieser Zahlenwert im Anwendungszusammenhang bedeutet.

Lösung

a) $p_{\text{Bayernlos}} = \dfrac{10}{6000000} = \dfrac{1}{6000000}$

$$p_{\text{Lotto}} = \frac{\binom{6}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}$$

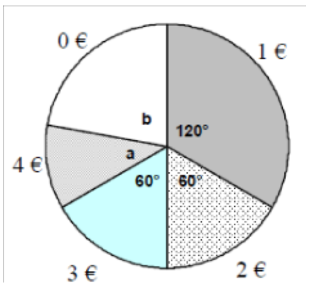
b) Reingewinn = Ausgezahlte Gewinne - 60000000 €

c) $\dfrac{27000000\text{ €} - 60000000\text{ €}}{60000000} = -0{,}55\text{ €}$

Eine Spieler verliert im Durchschnitt 0,55 €.

Aufgabe in der Handreichung

In einem Glücksspiel mit einem Glücksrad der abgebildeten Art soll bei einmaligem Drehen der Erwartungswert der Auszahlung 1,50 € betragen.



Die Auszahlungsbeträge sind jeweils eingetragen.

a) Berechnen Sie, wie groß dazu die Mittelpunktswinkel der Sektoren gewählt werden müssen, die zu den Auszahlungen 0 € und 4 € gehören.

b) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Zufallsgröße Auszahlung.

Lösung

a) (1) $a + b = 120$

$$(2)\ 4\cdot\frac{a}{360}+3\cdot\frac{60}{360}+2\cdot\frac{60}{360}+1\cdot\frac{120}{360} = 1{,}5 \quad\Rightarrow\quad a = 30 \quad\Rightarrow\quad b = 90$$

b) $\mathrm{Var}(A) = (0-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{4}+(4-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{12}+(3-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(2-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(1-1{,}5)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{19}{12}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{19}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{3}}$$

Aufgabe in der Handreichung

Ein Zeitschriftenladen bezieht pro Woche 3 Exemplare einer wenig verlangten Fahrradzeitschrift.

Pro Exemplar bezahlt der Besitzer 1,30 € und verkauft es für 2,70 €. Unverkaufte Fahrradzeitschriften entsorgt er, sobald er die neuen Exemplare erhält. Aus Erfahrung weiß er:

Nachfrage pro Woche	0	1	2	3	>3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Lohnt sich der Verkauf der Fahrradzeitschrift auf lange Sicht?

Lösung

$E(R) = 2{,}70\cdot0{,}3 + 5{,}40\cdot0{,}3 + 8{,}10\cdot0{,}2 - 3\cdot1{,}30 = 0{,}15$

Auf lange Sicht lohnt der Verkauf.

Aufgabe in der Handreichung

In der Klasse 10 C wurden eine Deutsch- und eine Mathematikschulaufgabe geschrieben.

Die Zufallsgrößen D bzw. M ordnen einem zufällig ausgewählten Schüler seine Note in der Deutsch- bzw. Mathematikschulaufgabe zu.

Dabei ergaben sich folgende Beziehungen:

Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsgrößen gilt $E(D) = E(M)$ und für die Varianzen gilt $\mathrm{Var}(D) < \mathrm{Var}(M)$.

Erklären Sie anschaulich, was diese beiden Beziehungen für die Verteilung der Einzelnoten bedeuten

Lösung

Die Durchschnittsnote in beiden Schulaufgabe sind gleich. Die Streuung der Mathematiknoten ist größer.