3. Bedingte Wahrscheinlichkeit

3.1 Vierfeldertafel und Baumdiagramm

Sind A und B zwei Ereignisse, dann nennt man das Schema

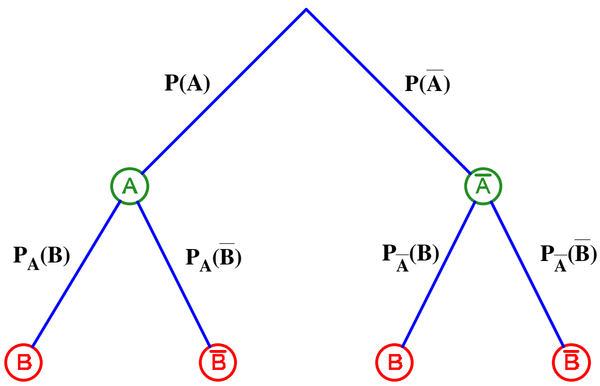
	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	

Vierfeldertafel für diese beiden Ereignisse.

Für die Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ des Eintretens von B unter der Bedingung, dass das Ereignis A eingetreten ist, ist dann gegeben durch

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Der Sachverhalt lässt sich mit einem Baumdiagramm darstellen.



1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines durch einen Pfad dargestellen UND-Ereignises ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)}$$

Man nennt diese Wahrscheinlichkeiten auch Pfadwahrscheinlichkeiten.

2. Pfadregel

Die totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignises ist gleich der Summe der für das Ereignis günstigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

$$\boxed{P(B) = P_A(B) + P_{\overline{A}}(B)}$$

Baumdiagramme eignen sich auch zur Veranschaulichung von mehrstufigen Zufallsexperimenten und der Ermittlung ihrer Ergebnismenge sowie zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln.

3.2 Formel von Bayes

Ist $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A, dann gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \text{ und } P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$$

und damit

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}}$$ **Formel von Bayes**

3.3 Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B werden als voneinander unabhängig bezeichnet, wenn das Eintreten von A keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B und umgekehrt hat.

Das heißt $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Zwei Ereignisse A und B sind voneinander unabhängig, wenn die ***Multiplikationsformel***

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

gilt. Andernfalls heißen sie abhängig voneinander.

Wenn A und B voneinander unabhängig sind,

dann sind dies auch A und $\overline{B}$, $\overline{A}$ und B sowie $\overline{A}$ und $\overline{B}$

Aufgabe in der Handreichung

Im Jahr 2006 waren in Europa ungefähr 0,1 % der Männer mit HIV infiziert. Mithilfe eines speziellen HIV-Tests soll festgestellt werden, ob eine HIV-Infektion vorliegt.

Wenn ein Test eine Infektion anzeigt, nennt man das Ergebnis positiv, unabhängig davon, ob die Infektion wirklich vorhanden ist oder nicht.

Wenn ein Mann mit HIV infiziert ist, dann beträgt die W'keit 99,9%, dass dieser spezielle Test positiv ausfällt.

Wenn der Mann nicht infiziert ist, dann beträgt die W'keit 99,8%, dass der Test bei ihm negativ ausfällt.

a) Der HIV-Test kann in zweierlei Hinsicht ein falsches Ergebnis (Fehldiagnose) liefern:

A: Obwohl eine HIV-Infektion vorliegt, erkennt sie der Test nicht.

B: Obwohl keine HIV-Infektion vorliegt, zeigt der Test eine HIV-Infektion an.

Geben Sie die W'keiten für die Fehldiagnosen A und B an.

b) Ermitteln Sie die W'keit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Mann ein positives Testergebnis hat.

c) Begründen Sie: Die W'keit, dass ein Mann bei Vorliegen eines positiven Testergebnisses tatsächlich mit HIV infiziert ist, beträgt ungefähr 33 %.

Anm.:

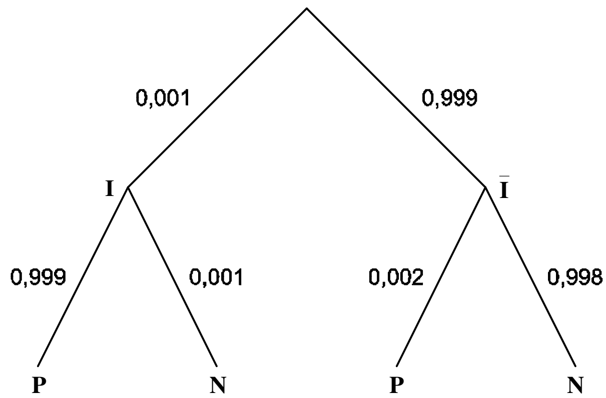
Aufgrund dieses niedrigen Werts muss beim Vorliegen eines positiven Testergebnisses zusätzlich ein anderer Test durchgeführt werden, bevor das Ergebnis mitgeteilt wird.

Lösung

I: Der Mann ist infiziert

P: Der Test fällt positiv aus

Baumdiagramm



$P(I) = 0{,}001$ und $P_I(P) = 0{,}999$ sowie $P_{\bar{I}}(N) = 0{,}998$

a) $P(A) = P_I(N) = 1 - P_I(P) = 0{,}001$ und $P(B) = P_{\bar{I}}(P) = 1 - P_{\bar{I}}(N) = 0{,}002$

b) $P(P) = P(I) \cdot P_I(P) + P(\bar{I}) \cdot P_{\bar{I}}(P) = 0{,}001 \cdot 0{,}999 + 0{,}999 \cdot 0{,}002 = 0{,}002997$

c) $P_P(I) = \dfrac{P(P \cap I)}{P(P)} = \dfrac{P(I) \cdot P_I(P)}{P(P)} = \dfrac{0{,}001 \cdot 0{,}999}{0{,}00297} \approx 33{,}6\%$

Bei einem Zufallsexperiment werden die Ereignisse E und F betrachtet,

wobei $P(E) > 0$ und $P(F) > 0$.

Welche der Zeichen "$=$", "$<$", "$>$" können anstelle der drei Punkte stehen:

$$P(E \cap F) \; ... \; P_F(E)$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

$P_F(E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$ mit $0 < P(F) \leq 1$.

Es kann als nur das "$=$" oder $\leq$ anstelle der drei Punkte stehen.

Aufgabe in der Handreichung

Ein Autobesitzer sucht wegen merkwürdiger Motorengeräusche seine Werkstatt auf.

Dort hört sich ein Mechaniker die Geräusche an und stellt zunächst eine Vermutung "Motor defekt" (D) oder "Motor nicht defekt" auf.

Bei der anschließenden genaueren Untersuchung wird festgestellt, ob ein Motorschaden vorliegt (M) oder nicht.

Beschreiben Sie folgende bedingte W'keiten mit Worten und geben Sie jeweils an, ob die bedingte Wahrscheinlichkeit bei einem fähigen Mechaniker groß oder klein sein sollte.

i) $P_M(D)$ ii) $P_{\bar{M}}(D)$ iii) $P_{\bar{D}}(\bar{M})$

Lösung

i) W'keit, dass der Mechaniker einen defekten Motor als solchen erkennt.

Bei einem fähigen Mechaniker sollte diese W'keit hoch sein.

ii) W'keit, dass der Mechaniker den Motor als defekt einstuft.

Bei einem fähigen Mechaniker sollte diese W'keit niedrig sein.

iii) W'keit, dass der Mechaniker richtigerweise erkennt, dass kein Motorschaden vorliegt.

Bei einem fähigen Mechaniker sollte diese W'keit hoch sein.

Aufgabe in der Handreichung

Ein Schafkopfspiel besteht aus 32 Karten, wovon jeder der vier Spieler acht Karten bekommt. Die höchsten Trümpfe sind die vier Ober. Gabi hebt ihre Karten nacheinander auf.

a) Mit welcher W'keit sind ihre ersten beiden Karten Ober?

b) Mit welcher W'keit ist ihre zweite Karte ein Ober, wenn die erste Karte ein Ober war?

c) Mit welcher W'keit ist der Herz-Ober unter ihren ersten beiden Karten, wenn ihre ersten beiden Karten Ober sind?

Lösung

a) $P(O_1 \cap O_2) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$

b) $P_{O_1}(O_2) = \frac{3}{31}$

c) $O_{O_1 \cap O_2}P(H) = \frac{P(O_1 \cap O_2 \cap H)}{P(O_1 \cap O_2)} = \frac{\frac{1}{32} \cdot \frac{3}{31} + \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{31}}{\frac{3}{248}} = \frac{1}{2}$
