Vektorgeometrie

===

1. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A\left(2 \mid -3 \mid 4\right)$, $B\left(-1 \mid 1 \mid 4\right)$ und $C\left(4 \mid -1 \mid 3\right)$

Berechnen die Seitenlängen und die Größe der Innenwinkel des Dreiecks.

Lösung

Aufstellen der Verbundungsvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2+4^2+0^2} = 5$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = 3$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5^2+(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{30}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{2}{3\cdot 5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{15}\right) \approx 82{,}3°$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 23 \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{23}{5\cdot\sqrt{30}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{44}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{58}}\right) \approx 32{,}9°$$

$$\gamma = 180° - 82{,}3° - 32{,}9° = 64{,}8°$$

---

2. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A\left(-1 \mid 4 \mid 3\right)$, $B\left(5 \mid -5 \mid 6\right)$ und $C\left(7 \mid 0 \mid 3\right)$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und die Länge der Höhe von C auf die Seite [AB].

Lösung

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 48 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12^2 + 24^2 + 48^2} = 6 \cdot \sqrt{21}$$

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{126}$$

Flächenformel für das Dreieck:

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = A_{ABC} \quad \Rightarrow \quad h_c = \frac{2 \cdot A_{ABC}}{c} = \frac{2 \cdot A_{ABC}}{\overline{AB}} \quad h_c = \frac{12\sqrt{21}}{\sqrt{126}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

---

3. Gegeben sind die Punkte $A\left(1 \mid -2 \mid 3\right)$, $B\left(5 \mid 2 \mid 1\right)$ und $C_k\left(5+2k \mid -1-k \mid 4+2k\right)$.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC_k für $k \neq -1$ gleichschenklig ist.

   b) Für welchen Wert von k ist das Dreieck gleichseitig?

   c) Für welchen Wert von k ist das Dreieck rechtwinklig?

Lösung

a) $$\overrightarrow{AC_k} = \overrightarrow{C_k} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 5+2k \\ -1-k \\ 4+2k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\left|\overrightarrow{AC_k}\right| = \sqrt{9k^2 + 18k + 18}}$$

$$\overrightarrow{BC_k} = \overrightarrow{C_k} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 5+2k \\ -1-k \\ 4+2k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\left|\overrightarrow{BC_k}\right| = \sqrt{9k^2 + 18k + 18}}$$

Für $k = -1$ ist C_k der Mittelpunkt von $\left[AB\right]$:

b) $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 6$$

Bedingung_

$$\sqrt{9k^2+18k+18} = 6 \;\Leftrightarrow\; 9k^2+18k+18 = 36 \;\Leftrightarrow\; k^2+2k-2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{k = -1 \pm \sqrt{3}}$$

c) Bedingung:

$$\begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (4+2k)\cdot 2k + (1-k)\cdot(-3-k) + (1+2k)\cdot(3+2k) = 0$$

ergibt $\mathbf{k = 0 \vee k = -2}$

---

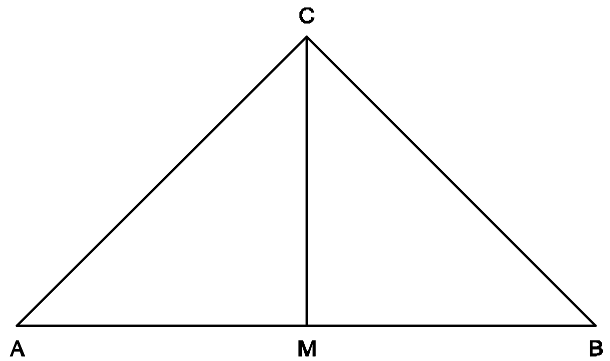
4. Gegeben sind die Punkte $A\left(1 \mid -2 \mid 3\right)$ und $B\left(5 \mid 2 \mid 1\right)$.

Finden Sie einen Punkt C, so dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

Wie viele Punkte C mit der gesuchten Eigenschaft gibt es und wie liegen diese Punkte?

Lösung

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \overline{AB} = 6$$



Mittelpunkt der Strecke $\left[AB\right]$: $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$ und hat die Länge 3.

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{M} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es gib unendlich viele Punkte. Sie liegen auf

a) der Symmetrieebene senkrecht zu $\left[AB\right]$

b) der Kugel mit $\left[AB\right]$ als Durchmesser

---

5. Gegeben sind die Punkte $A\left(1 \mid 2 \mid -3\right)$, $B\left(2 \mid -1 \mid 3\right)$, $C\left(3 \mid 2 \mid 1\right)$ und $D\left(5 \mid 2 \mid 0\right)$.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCD.

c) Welchen Abstand hat der Punkt D von der durch A, B und C festgelegten Ebene E ?

d) Prüfen Sie, ob die Kugel mit Mittelpunkt D und dem Radius 5 die Ebene E schneidet.

Wenn ja, berechnen Sie den Radius des Schnittkreises.

Lösung

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

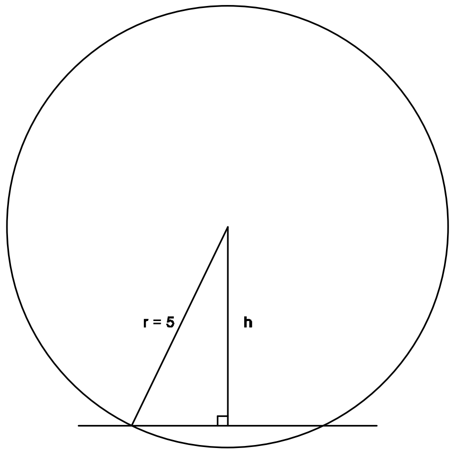
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-12)^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{\mathbf{61}}$$

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 30$

$$V_{ABCD} = \frac{30}{6} = \mathbf{5}$$

c) $\frac{1}{3}G\cdot h = V \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3\cdot V}{G} \quad h = \frac{15}{\sqrt{61}} = \mathbf{\frac{15}{61}\sqrt{61}}$

d) $r_1 = \sqrt{5^2 - \frac{225}{61}} = 10\sqrt{\frac{13}{61}} = \mathbf{\frac{10}{61}\sqrt{793}}$



---

6. Gegeben sind die Punkte $A\left(7 \mid 9 \mid -7\right)$, $B\left(1 \mid 2 \mid -1\right)$ und $C\left(3 \mid 8 \mid 8\right)$.

a) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann, so dass die Koordinaten von D ganzzahlig sind.

b) Zeigen Sie, dass man das Quadrat ABCD zu einem Würfel ABCDEFGH ergänzen kann, so dass die Koordinaten des Punktes E ebenfalls ganzzahlig sind.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für E?

c) Begründen Sie, dass die Kugel mit Mittelpunkt G und Radius 14 die durch das Quadrat ABCD bestimmte Ebene in einem Kreis schneidet und berechnen Sie den Radius dieses Kreises.

Lösung

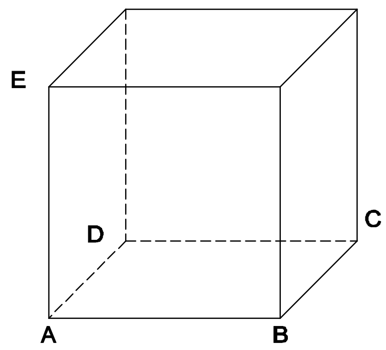
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\9\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-7\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix}3\\8\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix}$

$\overline{AB} = \overline{BC} = 11$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}9\\15\\2\end{pmatrix}$

b) Vektor der auf $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ senkrecht steht und die Länge 11 hat:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -99 \\ 66 \\ -22 \end{pmatrix} = 11 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{A} \pm \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) $r = \sqrt{14^2 - 11^2} = 5\sqrt{3}$

---

7. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius einer Kugel mit dem Radius 5, deren Mittelpunkt in der x_1x_2-Koordinatenebene liegt und die durch die Punkte $P\left(-1 \mid 1 \mid 0\right)$ und $Q\left(3 \mid -2 \mid 5\right)$ geht.

Lösung

Ansatz: $M\left(m_1 \mid m_2 \mid 0\right)$

Punkte eingesetzt:

(1) $(-1 - m_1)^2 + (1 - m_2)^2 = 5^2$

(2) $(3 - m_1)^2 + (-2 - m_2)^2 + 5^2 = 5^2$

(1) − (2) $8m_1 - 6m_2 = 36 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{4}{3}m_1 - 6$

in (3) eingesetzt ergibt $m_1 = 3$ und $m_2 = -2$
