Zufallgrößen

==

1. $E(X) \leq 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2{,}2$

---

2. a) Erwartungswert der Auszahlung:

$$E(X) = 10\,€ \cdot \frac{1}{10} + 5\,€ \cdot \frac{1}{5} = 2\,€$$

Im Mittel erwartet der Veranstalter einen Gewinn von 0,50 €.

b) $P(A) = 0{,}4^5 = 1{,}024\%$

$$P(B) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5$$

$$P(C) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}4^5$$

---

3. a) $P(X = 10) = p \cdot (1-p) + (1-p) \cdot p = 2p - 2p^2$

b) $E(X) = 4 \cdot (1-p)^2 + 10 \cdot (2p - 2p^2) + 25 \cdot p^2 = 9p^2 + 12p + 4$

c) $9p^2 + 12p + 4 = 16 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{3}$

Anordungen und Auswahl

==

1. a) Es gibt $\binom{8}{5}$ verschiedene Möglichkeiten

b) Es gibt $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{8!}{2!}$ verschiedene Möglichkeiten.

Ehepaare, Parteif(r)einde etc.

Urnenaufgaben

==

1. a) $P(A) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{14}{4}}$ und $P(B) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{14}{4}}$

b) $\frac{\binom{14}{4} - \binom{6}{4}}{\binom{14}{4}} = 1 - \frac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$

Dem Team gehören nicht nur Jungen an.

---

2. a) $P(E) = \binom{8}{4} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^4$

b) α) Es wird mindestens eine rote Kugel ezogen

β) Es werden mindestens 7 blaue Kugeln gezogen.

Auswahl und Zählprinzip

==

1. Genau dreimal hintereinander Zahl: ZZZKK, ZZZKZ, KZZZK, KKZZZ, ZKZZZ

Genau viermal hintereinander Zahl: ZZZZK, KZZZZ

Genau fünfmal hintereinander Zahl: ZZZZZ

$P(E) = \frac{8}{2^5} = \frac{1}{4}$

---

2. Es gibt $\left[\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{4} + \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} + \binom{4}{3} \cdot \binom{6}{3}\right] : 2 = 120$ Möglichkeiten verschiedene Mannschaften wenn man die beiden Mannschaften nicht unterscheidet.

---

3. a) Es gibt $\binom{12}{4} = 495$ Möglichkeiten.

b) $\binom{8}{4} = 70$ Möglichkeiten.

c) $\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2} = 168$ Möglichkeiten.

d) $\binom{4}{0} \cdot \binom{8}{4} + \binom{4}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2} = 462$ Möglichkeiten.

---

4. a) $P(A) = \dfrac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} \approx 30{,}4\%$

b) $P(B) = \dfrac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \approx 43{,}9\%$

c) $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(A) \approx 69{,}4\%$

d) $P(D) = \dfrac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} \approx 21{,}3\%$

e) $P(E) = \dfrac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} \approx 0{,}26\%$

f) $P(F) = P(A) + P(B) \approx 74{,}3\%$

---

5. a) $P(A) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{12}{2}} \approx 22{,}7\%$

b) $P(B) = P(A) \approx 22{,}7\%$

c) $P(C) = \dfrac{\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} \approx 9{,}1\%$

d) $P(D) = \dfrac{\binom{6}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} \approx 54{,}5\%$

---

7. a) $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \dfrac{12!}{12^{12}} \approx 99{,}9\%$

b) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{12^{12}} = 1 - \dfrac{\binom{12}{9}\cdot 9!}{12^{12}} = 98{,}5\%$

---

7. $10 = \overbrace{5+1+1+1+1+1}^{\text{eine Augenzahl mal, die anderen Augenzahlen je einmal}} =$

$= \overbrace{4+2+1+1+1+1}^{\text{eine Augenzahl 4mal, eine Augenzahl 2mal, die anderen vier Augenzahhlen je einmal}} =$

$= \overbrace{3+3+1+1+1+1}^{\text{zwei Augenzahen je dreimal, die anderen Augenzahlen je viermal}} =$

$= \overbrace{3+2+2+1+1+1}^{\text{eine Augenzahl dreimal, zwei Augenzahhlen je zweimal, alle anderen Augenzahhlen je einmal}} =$

$= \overbrace{2+2+2+2+1+1}^{\text{vier Augenzahle je zweimal, alle anderen Augenzahlen je einmal}}$

Anzahl der Pfade:

Möglichkeiten für die Wahl der Augenzahlen - Platzierungsmöglichkeiten

$5+1+1+1+1+1: \overbrace{\binom{6}{1}\cdot\binom{10}{5}\cdot 5!}^{\text{Anzahl der Pfade}} = 181440$

$4+2+1+1+1+1: \binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{2}\cdot 4! = 2268000$

$$3+3+1+1+1+1: \binom{6}{2}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot 4! = 1512000$$

$$3+2+2+1+1+1: \binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 3! = 9072000$$

$$2+2+2+2+1+1: \binom{6}{4}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 2! = 3402000$$

$$P(E) = (181440+2268000+1512000+3402000)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10} \approx 27{,}5\%$$

---

8. $$P(E) = \frac{\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}} \approx 33\%$$

Binomialverteilung

1. $$P(A) = P(X=20) = B(100; \frac{1}{6}; 20) = \binom{100}{20}\cdot(\frac{1}{6})^{20}\cdot(\frac{5}{6})^{80} \approx 6{,}8\%$$

$$P(B) = P(X \le 20) = F^{100}_{\frac{1}{6}}(20) = \sum_{i=0}^{20} B(100; \frac{1}{6}; i) \approx 84{,}8\%$$

$$P(C) = P(10 < X < 20) = P(X \le 19) - P(X \le 10) = F^{100}_{\frac{1}{6}}(19) - F^{100}_{\frac{1}{6}}(10) \approx 73{,}8\%$$

$$P(D) = P(X > 20) = 1 - P(X \le 20) = 1 - F^{100}_{\frac{1}{6}}(20) \approx 15{,}2\%$$

$$P(E) = P(X \ge 60) = 1 - P(X \le 59) = 1 - F^{100}_{\frac{1}{2}}(59) \approx 2{,}8\%$$

$$P(F) = P(X \le 30) = F^{100}_{\frac{1}{3}}(30) \approx 27{,}7\%$$

$P(G) = P(X \geq 85) = 1 - P(X \leq 84) = 1 - F_{\frac{5}{6}}^{100}(X \leq 84) \approx 38{,}8\%$

$P(H) = \left(\frac{5}{6}\right)^{100} \approx 0{,}0\%$

---

2. $n \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln \frac{2}{3}} \approx 7{,}4$ Man muss den Würfel mindestens achtmal werfen.

---

3. $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_{0,02}^{100}(3) \approx 14{,}1\%$

---

4. $k \cdot 1{,}20 - (200 - k) \cdot 0{,}90 \geq 210 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{390}{2{,}1}$

$P(X \geq 186) = 1 - P(X \leq 185) = 1 - F_{0,95}^{200}(185) \approx 92{,}2\%$

---

5. $P(X \geq 48) = 1 - P(X \leq 47) = 1 - F_{0,40}^{100}(47) \approx 6{,}4\%$

---

6. a) $P(X = 15) = B(100; 0{,}15; 15) \approx 11{,}1\%$

b) $P(15 - k \leq X \leq 15 + k) \geq 0{,}85 \quad \Rightarrow \quad k = 5$

c) $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}85} \approx 28{,}34$

Man muss der Produktion mindestens 29 Chips entnehmen.

d) $P(X \leq 22) = F_{0,15}^{200}(22) \approx 97{,}8\%$

$P(X > 22) = 1 - P(X \leq 22) = 1 - F_{0,10}^{200}(22) \approx 0{,}011\%$

Integralrechnung

==

1. a) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \left[\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

b) $\int_0^{\sqrt{2}} (x^4 - 2x^2)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{8}{15}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{16}{15}\sqrt{2}$

c) $x^2 - 3 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 2$

$\int_{-1}^{2} [(x^2-3)-(x-1)]dx = \int_{-1}^{2} [(x^2-x-2]dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{2} = -4{,}5$

$\Rightarrow \quad A = 4{,}5$

d) $\int_1^k \frac{4x}{x^2+1}dx = \left[2\cdot\ln(x^2+1)\right]_1^k = 2\cdot\ln(k^2+1) - 2\cdot\ln 2 = 2\cdot\ln\frac{k^2+1}{2}$

$\lim\limits_{k\to\infty}\left[2\cdot\ln\frac{k^2+1}{2}\right] = \infty$

Wendepunkte und Krümmungsverhalten

===

1. a) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(x^4 + x^3 - 3x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2\cdot(x^2+x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x^2+x-3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(4x^3+3x^2-6x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x\cdot(4x^2+3x-6) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{-3-\sqrt{105}}{8} \quad x_2 = 0 \quad x_3 = \frac{-3,+-\sqrt{105}}{8}$

$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot(12x^2+6x-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2+6x-6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -1 \;\; x_5 = 0{,}5$

$f'''(x) = \frac{1}{2}\cdot(24x+6) = 12x+3$

$f'''(x_4) = f'''(-1) = -9 \neq 0 \quad f'''(x_5) = f'''(0{,}5) = 9 \neq 0$

$W_1\left(-1 \mid -1{,}5\right)$ und $W_1\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{9}{32}\right)$ sind Wendepunkte.

$f''(x_1) > 0 \quad T_1\left(-1{,}66 \mid -2{,}62\right)$ ist ein Tiefpunkt.

$f''(x_2) = f''(0) = -6 < 0 \quad H\left(0 \mid 0\right)$ ist ein Hochpunkt.

$f''(x_3) > 0 \quad T_2\left(0{,}91 \mid -0{,}52\right)$ ist ein Tiefpunkt.

b) $w_1 : y = \frac{5}{2}x + 1 \quad w_2 : y = -\frac{7}{8}x + \frac{5}{32}$

c) Schnittstelle der Wendetangenten: $x = -\frac{1}{4}$

$$A_{,} = \int_{-1}^{-0{,}25} [(\frac{5}{2}x+1) - \frac{1}{2}(x^4+x^3-3x^2)]dx + \int_{-0{,}25}^{0{,}5} [(-\frac{7}{8}x+\frac{5}{32}) - \frac{1}{2}(x^4+x^3-3x^2)]dx =$$

$=$ ....doofe Rechnerei .... $= \frac{243}{1280}$ Nur Prinzip wichtig!

2\. a) $f_k(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}k \cdot x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 \cdot (\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = -\frac{4}{3}k$

$f_k'(x) = x^3 + k \cdot x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \;\; x_2 = k$

$f_k''(x) = 3x^2 + 2k \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0 \;\; x_4 = -\frac{2}{3}k$

$f_k'''(x) = 6x + 2k$

$f_k'''(=) = 2k$

Fallunterscheidung:

$k = 0 \quad f_0(x) = \frac{1}{4}x^4$

T(0 | 0) ist Tiefpunkt. Der Graph besitzt keine weiteren Extrem- und Wendepunkte.

$k \neq 0$

$f'''(0) = 2k \neq 0 \quad f'''(-\frac{2}{3}k) = \frac{4}{3}k \neq 0$

$W_1\left(0 \mid 0\right)$ und $W_2\left(-\frac{2}{3} \mid -\frac{12}{81}k^4\right)$ sind die Wendepunkte der Scharkurven.

$f_k''(-k) = -k^2 < 0$

Eine Scharkurve hat $T\left(-k \mid -\frac{1}{12}k^4\right)$ als Tiefpunkt.

b) $h(-k) = -\frac{1}{12}k^4$

c) $f_{-k}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(-k)\cdot x^3 = \frac{1}{4}\cdot(-x)^4 + \frac{1}{3}k\cdot(-x)^3 = f_k(-x)$

d) Es können nur die schiefen Wendetangenten gemeint sein!

$f_k'(-\frac{2}{3}k) = \frac{4}{27}k^3 \quad f_{-k}'(-\frac{2}{3}k) = -\frac{4}{27}k^3$

Bedingung: $\frac{4}{27}k^3\cdot(-\frac{4}{27}k^3) = -1 \quad\Rightarrow\quad k^6 = \frac{3^6}{2^4} \quad\Rightarrow\quad k = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \;\vee\; k = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$