Q 12/2 M 1	1. Schulaufgabe aus der Mathematik	17.03.2016

1. Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ und $F: x_1 + 2x_2 - 4 = 0$.

   a) Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen an und zeichnen Sie E in ein Koordinatensystem ein..

   b) Welche besondere Lage hat F im Koordinatensystem?

   c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F und zeichnen diese in die bereits angelegte Figur ein.

[**Mögliche Lösung für s:** $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$]

---

2. $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ und $g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ sind Gleichungen einer Ebene und einer Geraden in einem kartesischen Koordinatensytem.

   a) Für welchen Wert von a ist g_a parallel zu E und welchen Abstand hat in diesem Fall die Gerade von E?

   Nun sei $a = 1$.

   b) Bestimmen Sie die Punkte auf g_1, die von der Ebene E den Abstand 4 haben, und geben Sie mit Begründung an, welcher der beiden Punkte auf der Ursprungsseite von E liegt!

---

3. Gegeben sind die Punkte $A(-1 \mid 2 \mid 3)$ und $B(3 \mid 4 \mid 1)$ und die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E bzgl. der die Punkte A und B symmetrisch liegen.

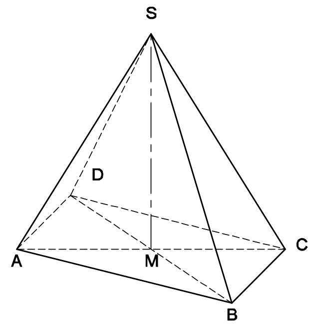
---

4. Gegeben sind Punkte $A(1 \mid -1 \mid -1)$ und $B(3 \mid -1 \mid b)$ und Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Bestimme b so, dass sich die Geraden AB und g schneiden! Gib für diesen Fall die Koordinaten des Schnittpunkts an!

Bitte umdrehen →

5. Das Rechteck ABCD ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS mit Spitze $S\left(-1 \mid 9{,}5 \mid 3\right)$.



Die Grundfläche einer geraden Pyramide besitzt einen Umkreis mit Mittelpunkt M und dieser ist Fußpunkt der Höhe der Pyramide.

Es ist $A\left(-2 \mid 1 \mid 0\right)$ und die Punkte B und C liegen auf der Geraden $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt A nicht auf der Geraden g liegt und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch A und g!

.[**Mögliches Ergebnis: $x_1 - 4x_2 - x_3 + 6 = 0$**]

b) Berechnen Sie die Koordinaten von B!

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Grundfläche.

[**Ergebnis: $M\left(1 \mid 1{,}5 \mid 1\right)$**]

d) Bestimme die Koordinaten der Ecke C und gib an, wie man Koordinaten der Ecke D berechnen kann.

---

a) $S_1\left(6 \mid 0 \mid 0\right)$, $S_2\left(0 \mid 4 \mid 0\right)$ und $S_3\left(0 \mid 0 \mid 67\right)$

b) F ist parallele zur x_3- Achse

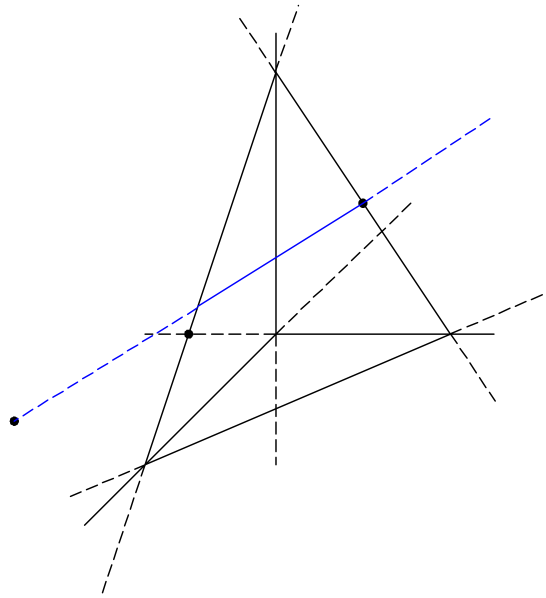
c)
$$\begin{array}{c|rcl} E & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 12 & = & 0 \\ F & x_1 + 2x_3 - 4 & = & 0 \end{array}$$

$$E - 2\cdot F \;\Big|\; -x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \quad \overset{x_3 = \sigma}{\Rightarrow} \quad x_2 = 2\sigma - 4$$

$$\text{in } F \;\Big|\; x_1 + 2\cdot(2\sigma - 4) - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -12 + 4\sigma$$

$$s: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$S_{12}\left(4 \mid -4 \mid 0\right)$, $S_{13}\left(4 \mid 0 \mid 2\right)$ und $S_{23}\left(0 \mid 2 \mid 3\right)$



---

2. a) Bedingung: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2+2+2a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2$

HNF: $\dfrac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4}{3} = 0 \quad d(g_{-2}; E) = \left| \dfrac{-2-4}{3} \right| = 2$

b) $\left| \dfrac{2\cdot(-1+\mu) + 2\mu + 2\mu - 4}{3} \right| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \dfrac{6\mu - 6}{3} \right| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 3 \vee \mu = -1$

$P\left(-2 \mid 2 \mid -1\right)$ und $Q\left(2 \mid -6 \mid 3\right)$

P liegt auf der Ursprungsseite.

---

3. $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + x_2 - x_3 - 6 = 0$$

---

4. $AB: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

Schnittbedingung:

$$\begin{array}{l|lcl} (1) & 1 + 2\mu & = & 1 + \lambda \\ (2) & -1 & = & 3 + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad b = -c\,2 \\ (3) & \mu \cdot b & = & -\lambda \end{array}$$

in (1) $\Big|$ $\mu = -11$ und damit $S\left(-1 \mid -1 \mid 2\right)$

---

5. a) A in g

$$\begin{array}{l|lclcl} (1) & 2\lambda & = & -2 & \Rightarrow & \lambda = -1 \\ & & & & \Rightarrow & \\ (2) & \lambda & = & 1 & & \\ (3) & 6 - 2\lambda & = & 0 & \Rightarrow & \lambda = 3 \end{array}$$

$$E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 4x_2 - x_3 + 6 = 0$$

c) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ 6 - 2\lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 2 \\ \lambda - 1 \\ 6 - 2\lambda \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2\lambda+2 \\ \lambda-1 \\ 6-2\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9\lambda - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \quad B\left(2 \mid 1 \mid 4\right)$$

c) Lotgerade: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$-1 + \mu \; - 4 \cdot (9{,}5 - 4\mu) - (3 - \mu) + 6 = 0 \quad 18\mu - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad M\left(1 \mid 1{,}5 \mid 1\right)$$

d) $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{BC}$$
