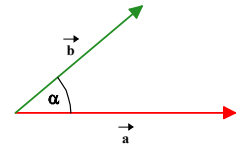


# 1. Rechnen mit Vektoren

## Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$



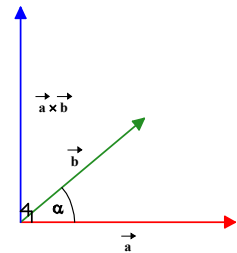
1. **Betrag** (= Länge) eines Vektors:  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

2. **Winkel** zwischen 2 Vektoren:  $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Sonderfall: Ist  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

## Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$



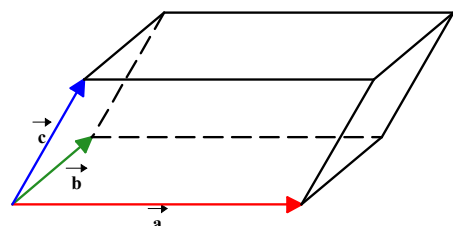
1. **Fächeninhalt** des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms:  $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$

2. **Fächeninhalt** des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Dreiecks:  $A_D = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$

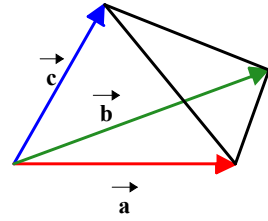
3. **Normalenvektor** einer Ebene

## Spatprodukt

1. **Volumen** des Spats:  $V_S = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$



2. **Rauminhalt** des Tetraeders:  $V_T = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

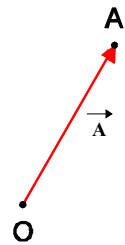


3.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind voneinander linear abhängig}$

## 2. Vektoren und Punkte

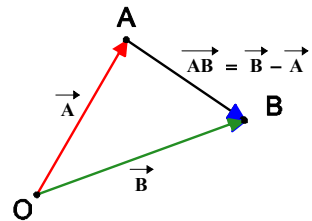
### Ortsvektor

Punkt:  $A(a_1 | a_2 | a_3)$  Ortsvektor:  $\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$



### Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten

Verbindungsvektor zweier Punkte:  $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$



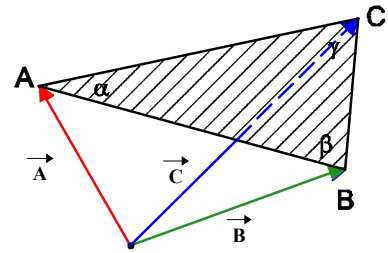
### Länge einer Strecke oder Abstand zweier Punkte

$$\overline{AB} = |\vec{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \left| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

### Winkel im Dreieck

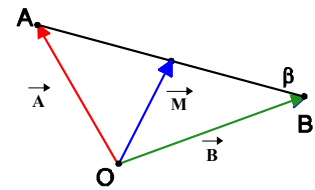
$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} \quad \cos\beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|}$$



### Mittelpunkt einer Strecke

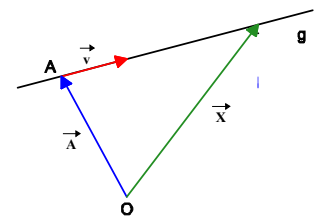
$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$



## 3. Geraden

### Parametergleichung einer Geraden

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

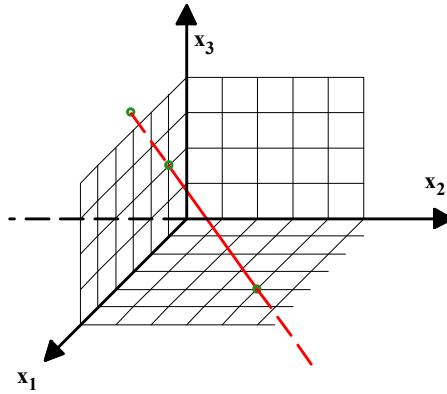


### Zeichnerische Darstellung - Spurpunkte

Ein Schnittpunkt einer Geraden mit einer Koordinatenebene heißt **Spurpunkt** in dieser Ebene.

Spurpunkt in der	Bedingung
$x_1x_2$ -Koordinatenebene	$x_3 = 0$
$x_1x_3$ -Koordinatenebene	$x_2 = 0$
$x_2x_3$ -Koordinatenebene	$x_1 = 0$

Existiert kein Spurpunkt in einer Koordinatenebene, dann ist die Gerade zu dieser Koordinatenebene parallel.

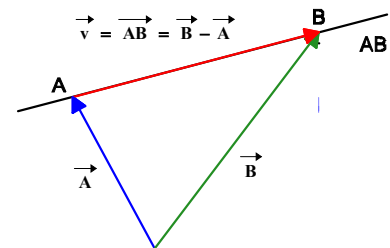



---

### Zweipunkteform

---

$$AB: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot (\vec{B} - \vec{A})$$




---

### Parallele, sich schneidende und windschiefe Geraden

---

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} \quad h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{u}$$

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow g \parallel h$$

Ist zusätzlich  $A \in h$ , dann sind  $g$  und  $h$  identisch.

Ansonsten gilt die Schnittpunktsbedingung  $\vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{u}$ .

Ist das sich ergebende Gleichungssystem nicht lösbar, dann sind  $g$  und  $h$  windschief.

---

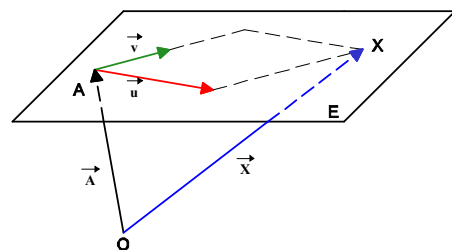
## 4. Ebenen

---

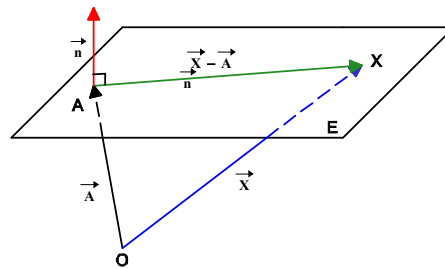
### Parametergleichung einer Ebene

---

$$E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



## Normalenform einer Ebenengleichung



$$\text{Normalenform: } \vec{n} \cdot (\vec{X} - \vec{A}) = 0 \Leftrightarrow n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - \underbrace{(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)}_{n_4} = 0$$

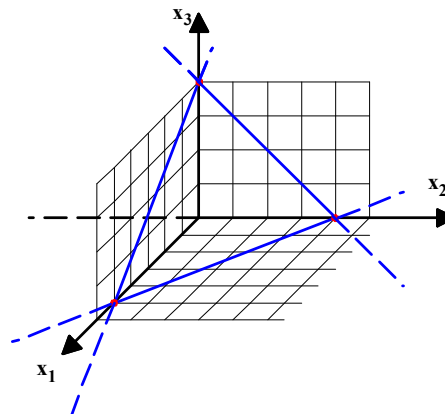
## Zeichnerische Darstellung - Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen - Spurgeraden

Schnittpunkt mit der	Bedingung
$x_1$ -Achse	$x_2 = x_3 = 0$
$x_2$ -Achse	$x_1 = x_3 = 0$
$x_3$ -Achse	$x_1 = x_2 = 0$

Existiert kein Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse, dann ist die Ebene zu dieser Koordinatenachse parallel. Hat die Ebene mit einer Koordinatenachse mehr als einen Punkt gemeinsam, dann verläuft sie durch diese Achse.

Die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen heißen **Spurgeraden**.

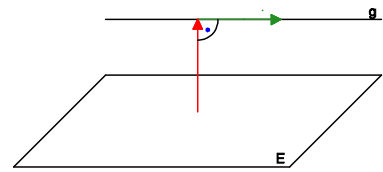
Spurgerade in der	Bedingung
$x_1x_2$ -Koordinatenebene	$x_3 = 0$
$x_1x_3$ -Koordinatenebene	$x_2 = 0$
$x_2x_3$ -Koordinatenebene	$x_1 = 0$



## Lagebeziehung zwischen Ebenen und Geraden

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad E: \vec{n} \cdot \left[ \vec{X} - \vec{A} \right] = 0$$

$$g \parallel E \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

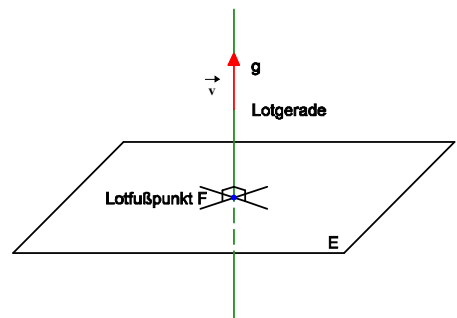


Die Gerade  $g$  liegt in der Ebene, wenn zusätzlich ihr Aufpunkt  $A$  in  $E$  liegt.

Ansonsten erhält man den zum Schnittpunkt gehörenden Parameter durch Einsetzen des allgemeinen Geradenpunkts in eine Normalenform von  $E$ .

Sonderfall:

$$g \perp E \Leftrightarrow \vec{v} = k \cdot \vec{n}$$



## Lagebeziehung zwischen Ebenen

Zwei Ebenen  $E$  und  $F$  mit den Normalenformen

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0 \quad \text{und} \quad F: m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4 = 0$$

sind parallel, wenn die Normalenvektoren  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$  linear abhängig sind.

Das heißt, es gibt ein  $k \in \mathbb{R}$ , so dass  $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$  ist.

Gilt zusätzlich  $n_4 = k \cdot m_4$ , dann sind die Ebenen identisch.

Ansonsten schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden. Die parametrisierte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} (1) & n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0 \\ (2) & m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4 = 0 \end{cases} \quad \text{ist der allgemeine Geradenpunkt der Schnittgeraden } s.$$

## Hessesche Normalenform

---

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4}{\pm\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

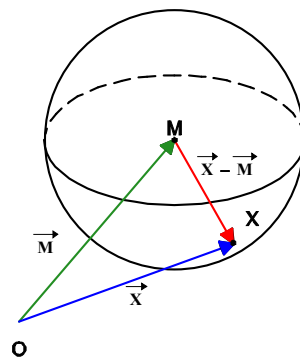
Setzt man die Koordinaten eines Punktes P in die HNF einer Ebene ein, dann erhält man eine Zahl, deren Betrag gleich dem Abstand des Punktes von der Ebene ist.

Diese Zahl ist positiv, wenn der Punkt auf der dem Ursprung abgewandten Seite von E ist.

Ist sie negativ, dann liegt P auf der Ursprungsseite.

## 5. Kugel

---



$$\overline{MX} = r \Leftrightarrow \left( \vec{X} - \vec{M} \right)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

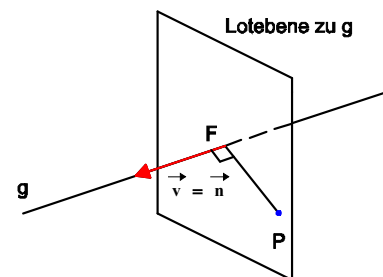
## 6. Abstände

---

### Abstand eines Punktes von einer Geraden

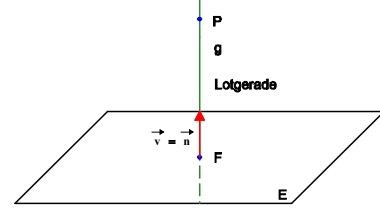
---

$$d(P; g) = \overline{PF}$$



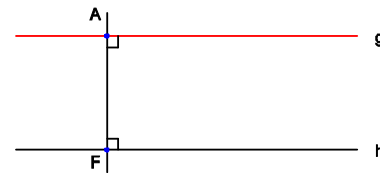
*Abstand eines Punktes von einer Ebene*

$$d(P; E) = \overline{PF}$$



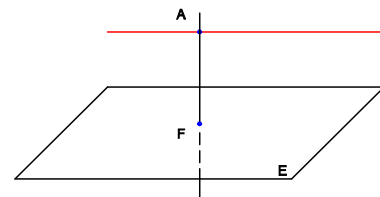
*Abstand paralleler Geraden*

$$d(g; h) = d(A; h) \text{ mit } A \in g$$



*Abstand einer Geraden zu einer parallelen Ebene*

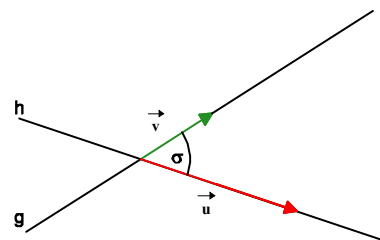
$$d(g; E) = d(A; E) \text{ mit } A \in g$$



**7. Winkel**

*Schnittwinkel sich schneidender bzw. Kreuzungswinkel windschiefer Geraden*

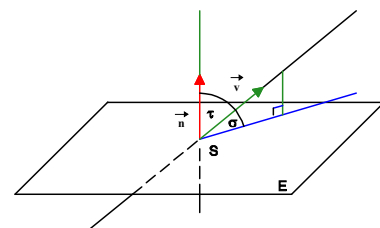
$$\cos \sigma = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} \right|$$



*Neigungswinkel bzw. Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene*

$$\sigma = 90^\circ - \tau \text{ mit}$$

$$\cos \tau = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} \right| \text{ oder } \sin \sigma = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} \right|$$

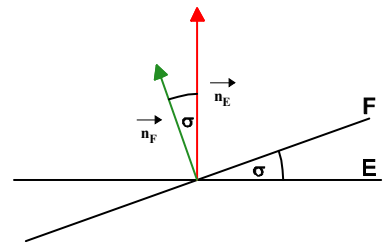




## *Schnittwinkel zweier Ebenen*

---

$$\cos\sigma = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$



Sonderfall: Zueinander senkrechte Ebenen  $\sigma = 90^\circ$

---