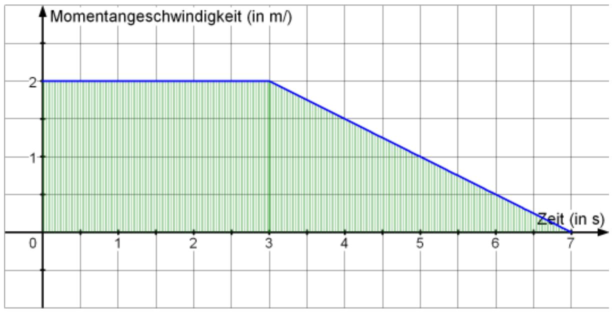
6 Integralrechnung

===

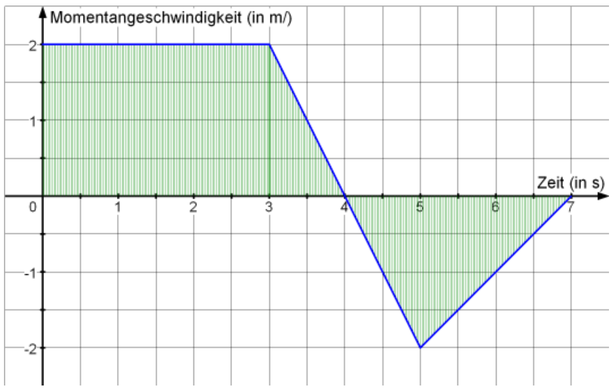
6.1 Lokale Änderungsrate und Gesamtänderung

Die Geschwindigkeit v ist die lokale Änderungsrate des Ortes x d.h. $\boxed{v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$

Bewegung einer Rangierlok



Zeit	3s	7s
Entfernung vom Bezugspunkt	$3s \cdot 2\frac{m}{s} = 6\text{ m}$	$6\text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 4s \cdot 2\frac{m}{s} = 10\text{ m}$



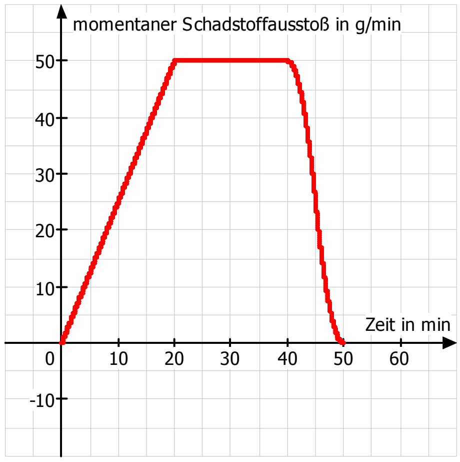
Zeit	3s	4s	7m
Entfernung vom Bezugspunkt	$3s \cdot 2\frac{m}{s} = 6\text{ m}$	$6\text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 1s \cdot 2\frac{m}{s} = 7\text{ m}$	$7m - \frac{1}{2} \cdot 3s \cdot 2\frac{m}{s} = 4\text{ m}$

Lässt sich eine Funktion als ***lokale Änderungsrate*** einer Größe deuten, dann ist die ***Änderung*** dieser Größe im Intervall $[a;\, b]$ gleich der der ***Differenz*** der Inhalte der Flächen, die vom Graphen der Funktion, den zu a und b gehörenden Ordinaten ober- und unterhalb mit der x-Achse mit dieser eingeschlossen wird

Aufgabe in der Handreichung

Das Diagramm zeigt den momentanen Schadstoffausstoß einer Feuerungsanlage in Abhängigkeit von der Zeit seit Beginn der Feuerung.
Schätzen Sie die Gesamtmasse des ausgetretenen Schadstoffs während der 60minütigen Betriebszeit ab.

Ihre Überlegungen müssen nachvollziehbar sein.



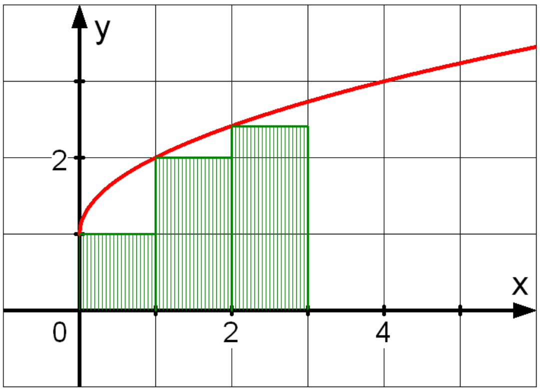
Lösung

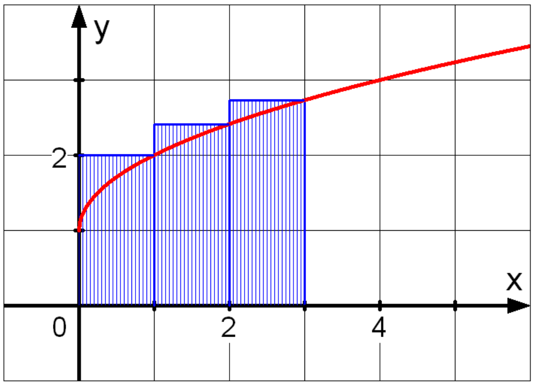
Die Gesamtmasse des ausgetretenen Schadstoffes entspricht der Fläche unter dem Graphen

$$m \approx \frac{1}{2} \cdot (50\text{ min} + 20\text{ min}) \cdot 50\text{g} = 1750\text{ g}$$

6.2 Das bestimmte Integral

Die Fläche, die vom Graphen einer Funktion f im Intervall $\left[a;\, b\right]$ einschlossen wird. lässt sich lässt sich mit einem ***Grenzwertprozess*** berechnen.





Untersumme:

$U_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (1 + \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$

Obersumme:

$O_4 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (1 + \sqrt{2}) + 1 \cdot (1 + \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Für eine auf einem Intervall $\left[a;\, b\right]$ definierte und stetige Funktion nennt man den gemeinsamen Grenzwert von Ober- und Untersumme

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} O_n$$

bestimmtes Integral von f von a bis b. Man schreibt dafür $\int_a^b f(x)dx$.

$\int$ ist das ***Integralzeichen***

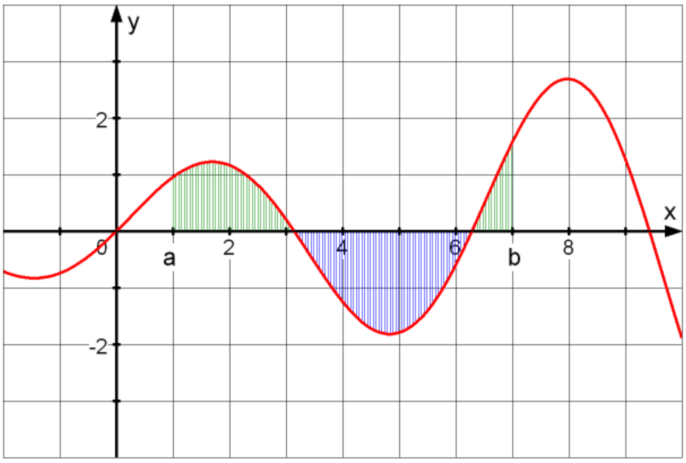
a heißt ***untere*** und b ***obere Grenze*** des Integrals

dx, das infinitesimal kleine Δx, gibt die ***Integrationsvariable*** an

---

6.3 Das Integral als Flächenbilanz; die Integralfunktion

Ist f eine auf dem Intervall $[a; b]$ definierte und ***stetige Funktion***, dann ist der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$ gleich der Differenz der Flächstücke ober- und unterhalb der x-Achse, die der Graph von f von $x = a$ bis $x = b$ mit der x-Achse einschließt.



Ist f eine stetige Funktion mit dem Definitionsbereich D und $a \in D$, dann heißt die auf D definierte Funktion

$$I_a: x \to \int_a^x f(t)dt$$

Integralfunktion von f zur unteren Grenze a.

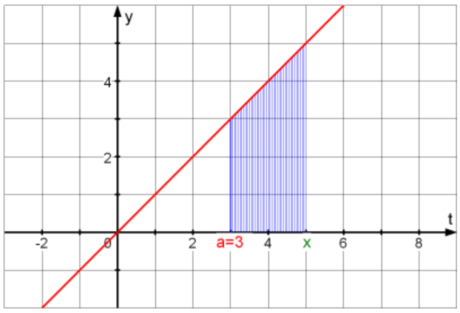
Bemerkung:

Für jede Integralfunktion ist die untere Integrationsgrenz ***Nullstelle*** d.h.

$$\boxed{I_a = \int_a^x f(t)dt \quad \Rightarrow \quad I_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0}$$

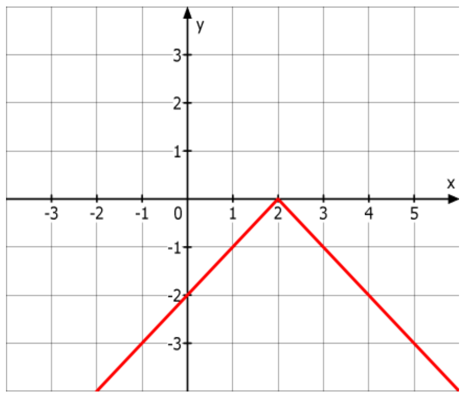
Beispiel:

Für die Funktion $f : x \to y = x$ gilt



$$I_3 : x \to \int_3^x t\,dt = \frac{1}{2}\cdot(x+3)\cdot(x-3) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}$$

Aufgabe in der Handreichung



Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$, der kongruent zum Graphen der Betrags-funktion

$g : x \to |x|,\ D_g = \mathbb{R}$, ist.

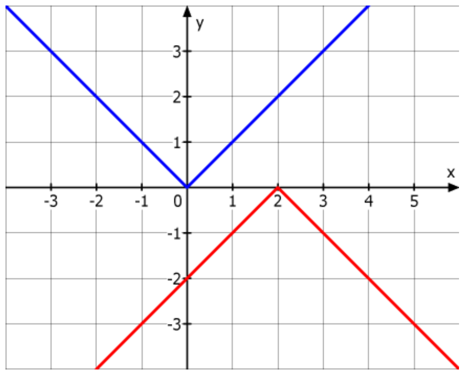
a) Zeichnen Sie den Graphen der Betragsfunktion g ein und beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen von g entsteht.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Integralfunktion

$F : x \to \int_2^x f(t)dt$ für $-1 \le x \le 5$ in das gegebene Diagramm ein.
(Hinweis: Eine integralfreie Darstellung der Funktion F ist hierzu nicht notwendig)

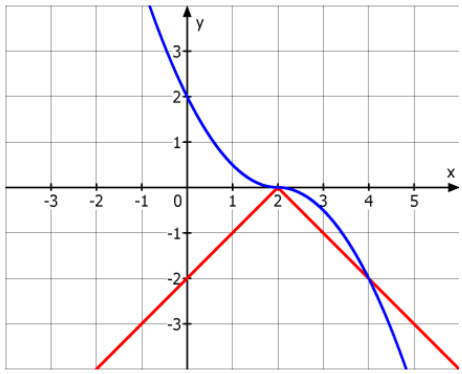
Lösung

a)



Man spiegelt den Graphen von g an der x-Achse und verschiebt dasBild um zwei Einheiten nach rechts.

b)

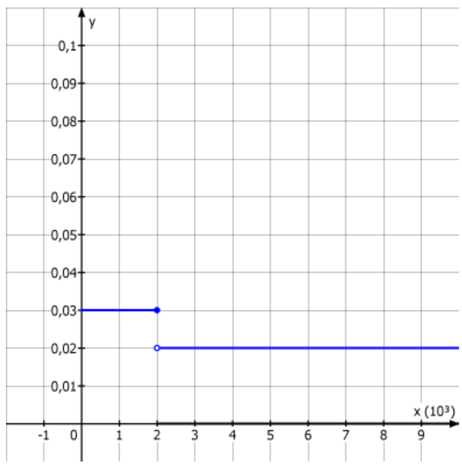


Aufgabe in der Handreichung

Um Kunden anzulocken, bietet eine Bank ein Sparbuch an, bei dem die ersten 2000 Euro mit 3% pro Jahr be sonders gut verzinst werden.

Die Funktion f gibt den Zinssatz an, der für den x-ten eingezahlten Euro pro Jahr gezahlt wird.

a) Berechnen Sie, wie viel Zins jemand nach einem Jahr erhält, der das ganze Jahr über 3000 Euro auf dem Konto hatte.



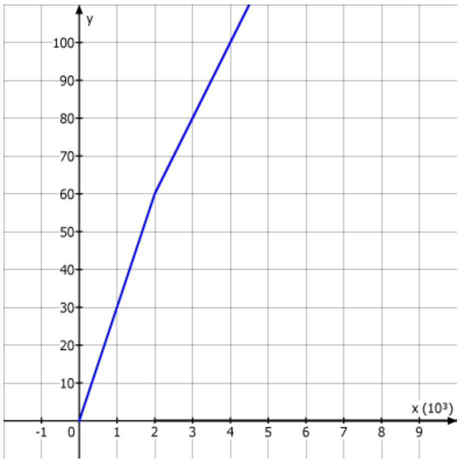
b) Zeichnen Sie die Integralfunktion $F: \; x \to \int_0^x f(t)dt$ für $0 \le x < 3500$ in das Diagramm ein

(skalieren Sie dabei die y-Achse geeignet), und geben Sie an, welche Bedeutung die Funktionswerte von F im Sachzusammenhang haben.

Lösung

a) Er erhält $60\,€ + 20\,€ = 80\,€$.

b)



Aufgabe in der Handreichung

Die Änderungsrate a eines Pflanzenbestands wird für die nächsten 20 Jahre wie folgt modelliert:

$a(t) = 1{,}12 \cdot t \cdot (t-8) \cdot (t-20)$

wobei t die Zeit in Jahren angibt und a(t) in $\frac{\text{Pflanzen}}{\text{Jahr}}$ gemessen wird.

a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von a, die die Nullstellen von a und die Vorzeichen der Termwerte a(t) wiedergibt.

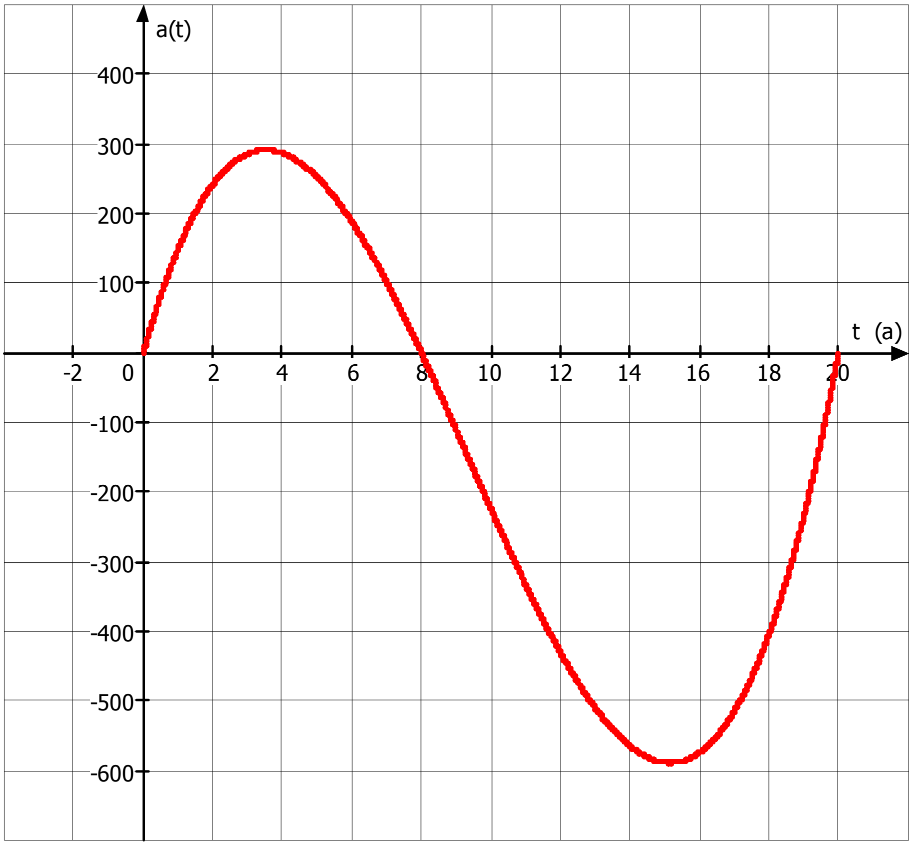
b) Geben Sie an, in welchen Zeiträumen der Bestand zunimmt bzw. abnimmt. Begründen Sie, wann innerhalb der betrachteten 20 Jahre der Bestand maximal ist.

c) Am Anfang waren 10000 Pflanzen vorhanden.

Bestimmen Sie den Maximal- und Minimalbestandim betrachteten Zeitraum von 20 Jahren.

Lösung

a)



b) Der Bestand nimm in den ersten 8 Jahren zu um dann in den nächsten 12 Jahren abzunehmen. Der Bstand ist als also nach 8 Jahren maximal.

c) $$\int_0^8 a(t)dt = 1{,}12 \cdot \int_0^8 (t^3 - 28t^2 + 160t)dt = 1{,}12 \cdot \left[\frac{t^4}{4} - \frac{28}{3}t^3 + 80t^2 \right]_0^8 \approx 1529$$

Der Maximalbestand beträgt 11529 Stück.

$$\int_0^{20} a(t)dt = 1{,}12 \cdot \int_0^{20} (t^3 - 28t^2 + 160t)dt = 1{,}12 \cdot \left[\frac{t^4}{4} - \frac{28}{3}t^3 + 80t^2 \right]_0^{20} \approx -2667$$

Der Minimalbestand beträgt 73333 Stück.

6.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (***HDI***):

Ist f eine stetige Funktion mit dem Definitionsbereich D und a ∈ D, dann ist die Integral-funktion

$$I_a: x \to \int_a^x f(t)dt$$

differenzierbar und es ist $I_a'(x) = f(x)$ für $x \in D$.

Die Integralfunktion I_a ist eine ***Stammfunktion*** von f.

Folgerung:

Ist f eine eine auf dem Intervall $\left[a; b\right]$ definierte und stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion auf diesem Intervall, dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Beispiel:

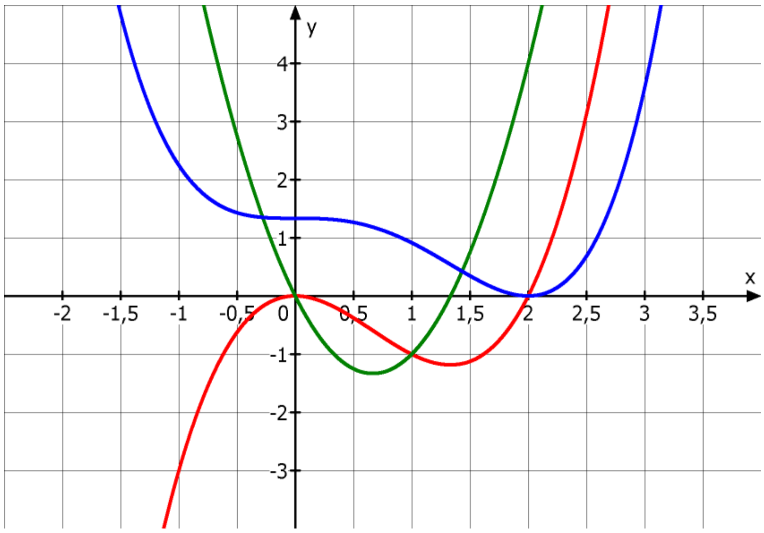
$f(x) = x^3 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 4x$f(x) = x 3 . 2x2 ü- f '(x) = 3x2 . 4x

$$f(x) = x^3 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad I(x) = \int_2^x f(t)dt = \int_2^x (t^3 - 2t^2)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3\right]_2^x =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{2}{3}\cdot 2^3\right) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}$$

Es ist $\boxed{I'(x) = f(x)}$ und damit $\boxed{I''(x) = f'(x)}$.

Funktion $f: x \to f(x)$	Ableitung $f': x \to f'(x)$	Integralfunktion $I: x \to \int_c^x f(t)dt$
$f(x) > 0$ für $x \in]a; b[$		I ist sms in]a; b[
$f(x) < 0$ für $x \in]a; b[$		I ist smf in]a; b[
$f(x_0) = 0$ mit VZW		$x_0$ist Extremstelle von I
	$f'(x) > 0$ für $x \in]a; b[$	I ist in]a; b[linksgekümmt
	$f'(x) < 0$ für $x \in]a; b[$	I ist in]a; b[rechtsgekümmt
	$f'(x_0) = 0$ mit VZW	x_0 ist Wendestelle von I



6.5 Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

Für ***Stammfunktionen*** gilt

A Ist die F(x) eine Stammfunktion von f(x), dann ist $c \cdot F(x)$ eine Stammfunktion von $c \cdot f(x)$.

B Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x) und G(x) eine Stammfunktion von g(x),

dann ist $F(x) + G(x)$ eine Stammfunktion $f(x) + g(x)$.

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f(x) heißt ***unbestimmtes Integral*** von f und wird mit

$$\boxed{\int f(x)dx}$$

bezeichnet. Es ist also

$$\boxed{\int f(x)dx = \left\{ F \,\middle|\, F'(x) = f(x) \right\}}$$

Ist die Definitionsmenge ein Intervall, dann unterscheiden sich zwei Stammfunktionen von f nur durch eine Konstante.

Ist F eine Stammfunktion von f, dann schreibt man

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

Wichtige unbestimmte Integrale

$$\boxed{\int x^k dx = \frac{1}{k+1} \cdot x^k + C} \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \neq -1$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C}$$

$$\boxed{\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C}$$

$$\boxed{\int \sin x\,dx = -\cos x + C} \text{ und } \boxed{\int \cos x\,dx = \sin x + C}$$

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + C}$$

Logarithmische Integration

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

Beachtet man die Kettenregel, dannn lassen sich weitere Integrale wie

$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax} + C$$

$$\int a\cdot\sin(bx+c)dx = -\frac{a}{b}\cdot\cos(bx+c) + C \text{ usw.}$$

berechnen.

Aufgabe in der Handreichung

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden in IR definierten Funktionen.

a) $f: x \to 2x\cdot e^{x^2}$ b) $f: \to \dfrac{2x}{x^2+1}$ c) $f: \to e^{2x+3}$

6.6 Eigenschaften des bestimmten Integral

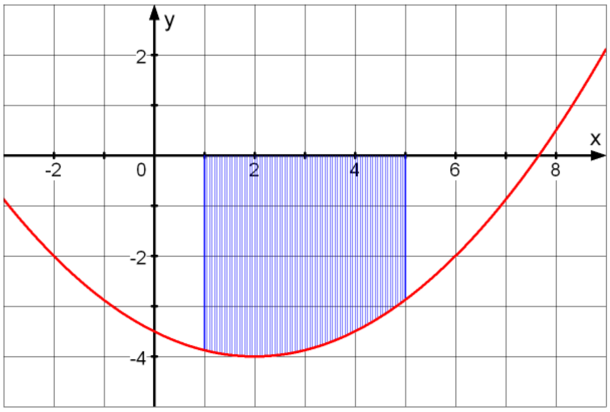
Für bestimmte Integrale gilt

$\int_a^b f(x)(dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

6.7 Flächenberechnungen mit dem Integral

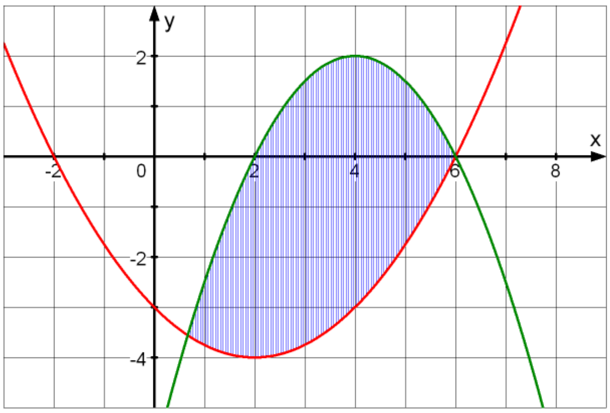


Befindet sich im Innern des Intervalls $\left[a;\, b\right]$ keine Nullstelle der Funktion f,

dann gilt für den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt

$$\boxed{A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|}$$

Ist dies nicht der Fall, dann berechnet man den Inhalt der Flächenstücke ober- bzw. unterhalb der x-Achse und addiert deren Werte.



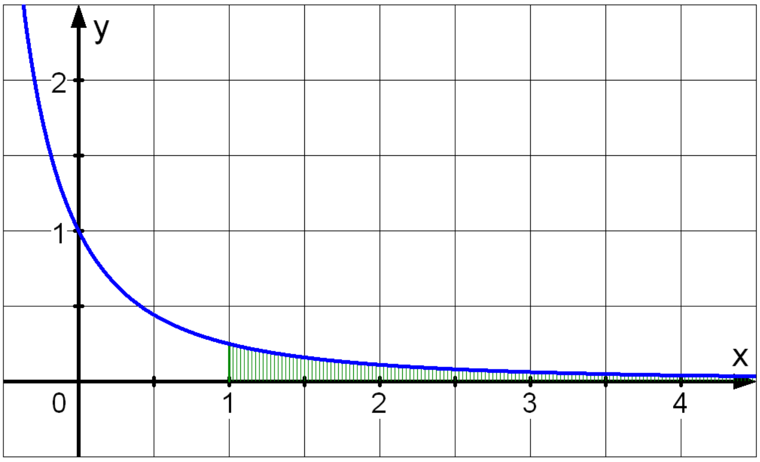
Sind a und b benachbarte Schnittstellen zweier Funktionen f und g, dann gilt für den Inhalt der Fläche, welche die Graphen von f und g miteinander einschließen

$$\boxed{A = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right|}$$

6.8 Unendlich ausgedehnte Flächen

A Eine Integrationsgrenze liegt im Unendlichen

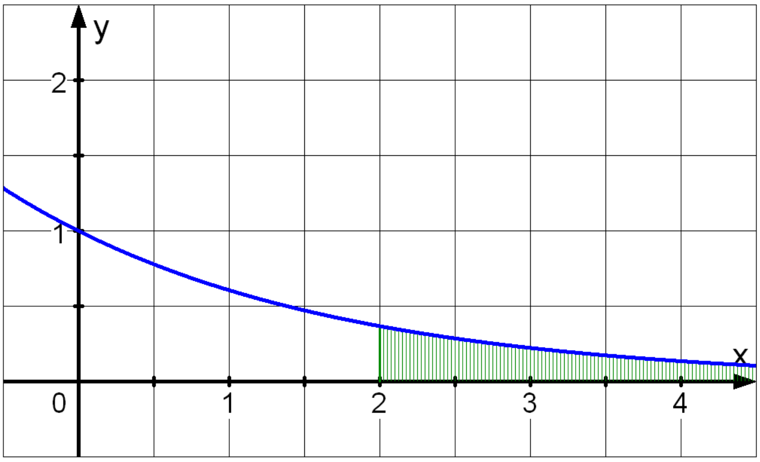
Beispiel 1



$$A(a) = \int_1^a \frac{1}{(x+1)^2}dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^a = -\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{a \to \infty} A(a) = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Beispiel 2

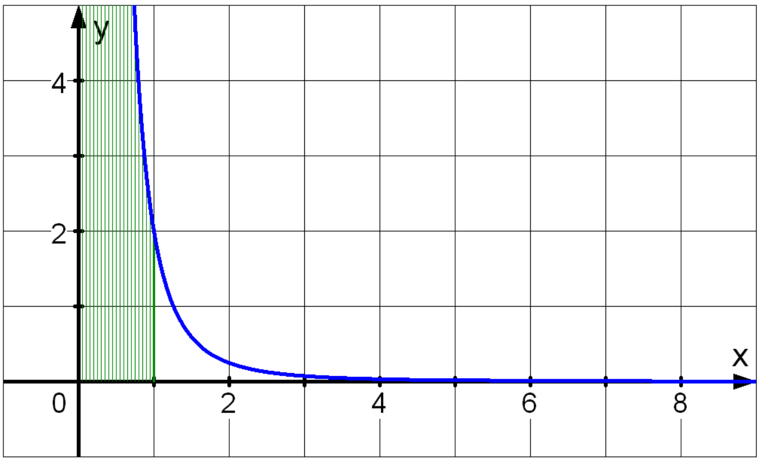


$$A(a) = \int_2^a e^{-\frac{1}{2}x}dx = \left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_2^a = -2e^{-\frac{1}{2}a} + 2e^{-1}$$

$$\lim_{a \to \infty} A(a) = \lim_{a \to \infty} \left(\frac{2}{e} - 2e^{-\frac{1}{2}a}\right) = \frac{2}{e}$$

B Der Integrand wird unendlich groß

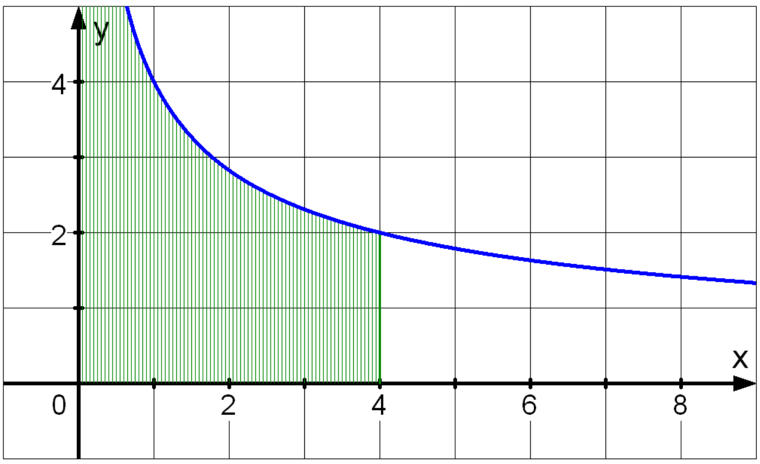
Beispiel 1



$$A(a) = \int_a^1 \frac{2}{x^3}dx = \int_a^1 2\cdot x^{-3}dx = \left[-x^{-2}\right]_a^1 = a^{-2} - 1$$

$$\lim_{a \to 0+0} A(a) = \lim_{a \to 0+0} \left(\frac{1}{a^2} - 1\right) = \infty$$

Beispiel 2



$$A(a) = \int_a^4 \frac{4}{\sqrt{x}}dx = \int_a^4 4\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[8\cdot x^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 16 - 8\cdot\sqrt{a}$$

$$\lim_{a \to 0+0} A(a) = \lim_{a \to 0+0} (16 - 8\cdot\sqrt{a}) = 16$$