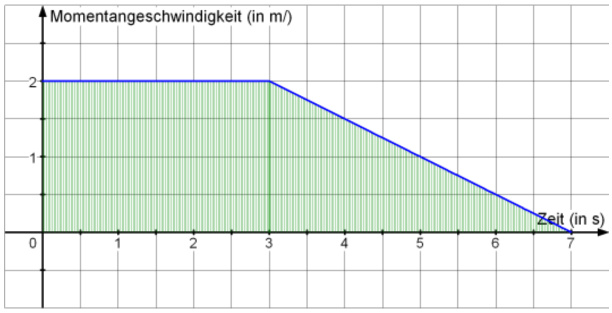
I. Integralrechnung

==

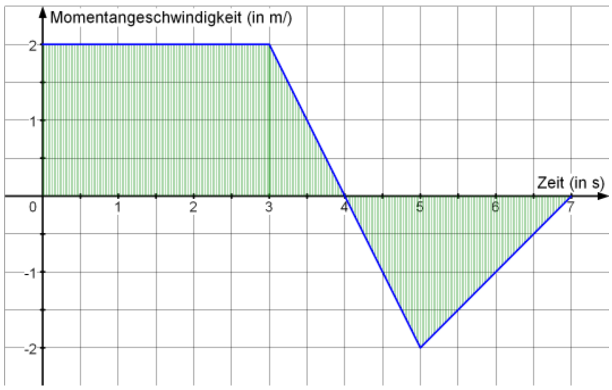
1. Lokale Änderungsrate und Gesamtänderung

Die Geschwindigkeit v ist die lokale Änderungsrate des Ortes x d.h. $\boxed{v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$

Bewegung einer Rangierlok



Zeit	3s	7s
Entfernung vom Bezugspunkt	$3s \cdot 2\frac{m}{s} = 6\ m$	$6\ m + \frac{1}{2} \cdot 4s \cdot 2\frac{m}{s} = 10\ m$



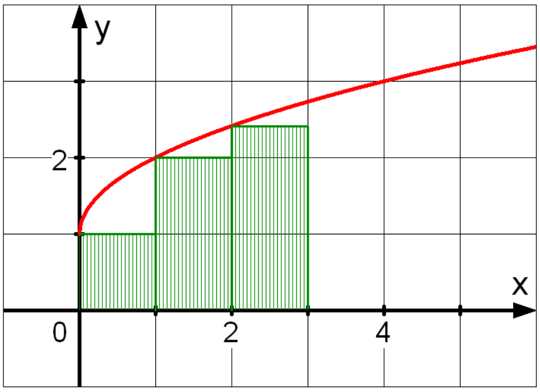
Zeit	3s	4s	7m
Entfernung vom Bezugspunkt	$3s \cdot 2\frac{m}{s} = 6\ m$	$6\ m + \frac{1}{2} \cdot 1s \cdot 2\frac{m}{s} = 7\ m$	$7m - \frac{1}{2} \cdot 3s \cdot 2\frac{m}{s} = 4\ m$

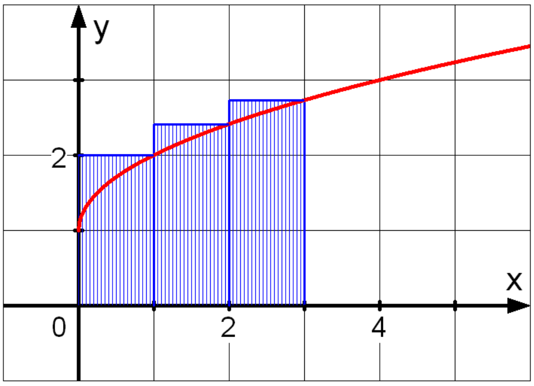
Lässt sich eine Funktion als ***lokale Änderungsrate*** einer Größe deuten, dann ist die ***Änderung*** dieser Größe im Intervall $\left[a; b\right]$ gleich der der ***Differenz*** der Inhalte der Flächen, die vom Graphen der Funktion, den zu a und b gehörenden Ordinaten ober- und unterhalb mit der x-Achse mit dieser eingeschlossen wird.

---

2. Das bestimmte Integral

Die Fläche, die vom Graphen einer Funktion f im Intervall $\left[a;\, b\right]$ einschlossen wird. lässt sich lässt sich mit einem ***Grenzwertprozess*** berechnen.





Untersumme:

$U_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot \sqrt{3}$

Obersumme:

$O_4 = 1 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot$

Für eine auf einem Intervall $\left[a;\, b\right]$ definierte und stetige Funktion nennt man den gemeinsamen Grenzwert von Ober- und Untersumme

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} O_n$$

bestimmtes Integral von f von a bis b. Man schreibt dafür $\int_a^b f(x)dx$.

$\int$ ist das ***Integralzeichen***

a heißt ***untere*** und b ***obere Grenze*** des Integrals

dx, das infinitesimal kleine Δx, gibt die ***Integrationsvariable*** an

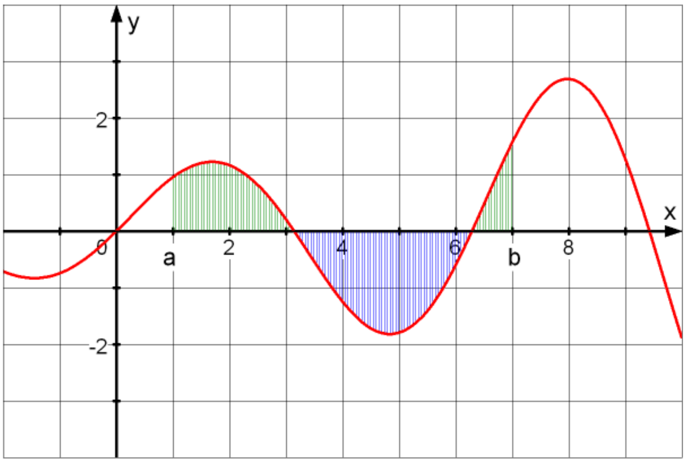
---

6.3 Das Integral als Flächenbilanz; die Integralfunktion

Ist f eine auf dem Intervall $\left[a;\, b\right]$ definierte und ***stetige Funktion***, dann ist der Wert des

bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$ gleich der Differenz der Flächstücke ober- und unterhalb der x-

Achse, die der Graph von f von $x = a$ bis $x = b$ mit der x-Achse einschließt.



Ist f eine stetige Funktion mit dem Definitionsbereich D und $a \in D$, dann heißt die auf D definierte Funktion

$$I_a \colon x \to \int_a^x f(t)dt$$

Integralfunktion von f zur unteren Grenze a.

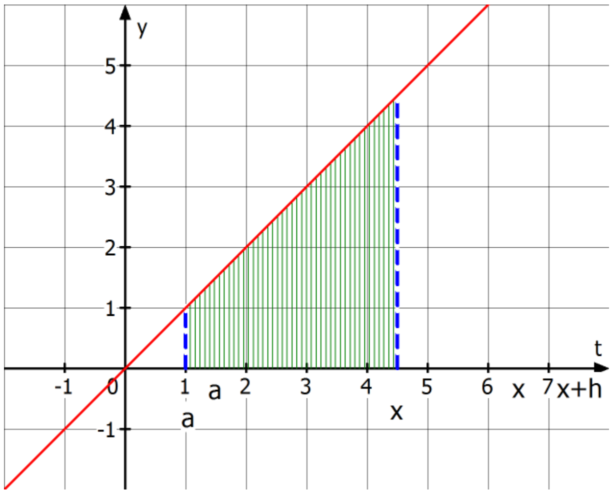
Bemerkung:

Für jede Integralfunktion ist die untere Integrationsgrenz ***Nullstelle*** d.h.

$$\boxed{I_a = \int_a^x f(t)dt \quad \Rightarrow \quad I_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0}$$

Beispiel:

Für die Funktion $f: t \rightarrow y = t$ gilt



$$I_3\colon x \rightarrow \int_1^x t\,dt = \frac{1}{2}\cdot(1+x)\cdot(x-1) = \frac{1}{2}\cdot(x^2-1^2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

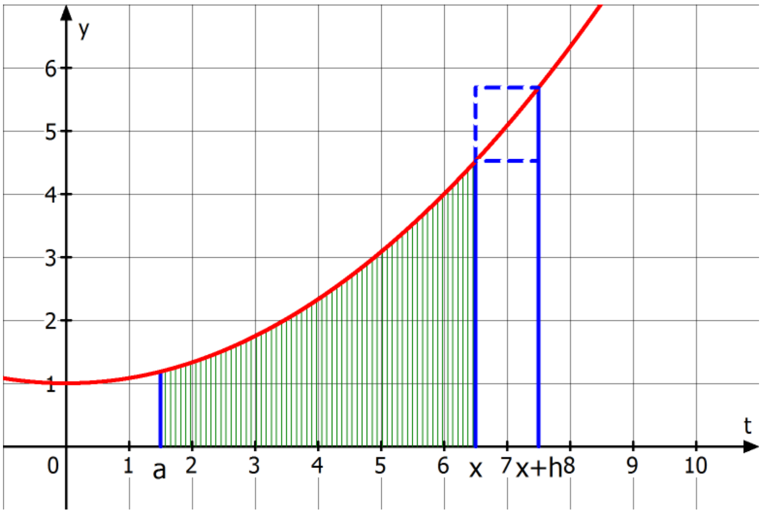
---

4. Die Ableitung der Integralfunktion (für streng monoton steigende Funktionen)

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{I_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}}$$



Abschätzung:

$$\begin{array}{ccccc}
f(x)\cdot h & \le & \int_x^{x+h} f(t)dt & \le & f(h+h)\cdot h \\
 & & \Downarrow & & \\
f(x) & \le & & \le & f(x+h) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
f(x) & & I_a'(x) = f(x) & & f(x)
\end{array}$$