Grundkurs	Infinitesmalrechnung I	2011

Gegeben ist die Funktion $f: x \to (e^x - 2)^2$ mit Defitionsmenge $\mathbb{R}$.

Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

   b) Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts, das Krümmungsverhalten und die Lage des Wendepunkts von G_f.

   c) Zeigen Sie, dass G_f und die durch die Gleichung $y = 4$ gegebene Gerade g genau einen Schnittpunkt $S\left(x_S \mid y_S\right)$ besitzen, und bestimmen Sie dessen Koordinaten.

   $\left[\text{Teilergebnis: } x_S = 2 \cdot \ln 2\right]$

   d) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von G_f.

   Berechnen Sie $f(-2)$ und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-4 \leq x \leq 1{,}5$. Tragen Sie auch die Wendetangente und die Gerade g ein.

   e) Betrachtet wird die Tangente an G_f in einem Punkt P, der Gf durchl auft. Geben Sie jeweils alle Werte an,

   α) die die Steigung der Tangente

   β) der y-Achsenabschnitt der Tangente

   dabei annimmt.

Gegeben ist nun die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $I: x \to \int_{\ln 2}^{x} f(t)dt$..

2. a) Bestimmen Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von I das Monotonieverhalten von I. Zeigen Sie, dass der Graph von I einen Terrassenpunkt besitzt und geben Sie dessen Koordinaten an.

   b) Geben Sie ohne weitere Rechnung das Verhalten von I für $x \to -\infty$ an.

3. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \to \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^{x} + 4x$ mit der Denitionsmenge $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

b) Der Graph G_f schließt mit den durch die Gleichungen $f = 4$ bzw. $x = u$ ($u < 0$ bestimmten Geraden im I. und II. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(u)$ ein.

Bestimmen Sie $A(u)$.

Ermitteln Sie $\lim\limits_{u \to -\infty} A(u)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Lösung

1. a) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x - 2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x - 2)^2 = (-2)^2 = 4 \text{ weil } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (e^x - 2)^2 = \infty \text{ weil } \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

b) $f'(x) = 2 \cdot (e^x - 2) \cdot e^x = 2e^x \cdot (e^x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 2$

x	$-\infty < x < \ln 2$	$\ln 2 < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	$+$

$T\left(\ln 2 \mid 0\right)$ ist ein Tiefpunkt des Graphen von f

$$f''(x) = 2e^x \cdot (e^x - 1) + 2e^x \cdot e^x = 2e^x \cdot (2e^x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$f(-\ln 2) = (\frac{1}{2} - 2)^2 = 2{,}25$$

x	$-\infty < x < -\ln 2$	$-\ln 2 < x < \infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
	RK	LK

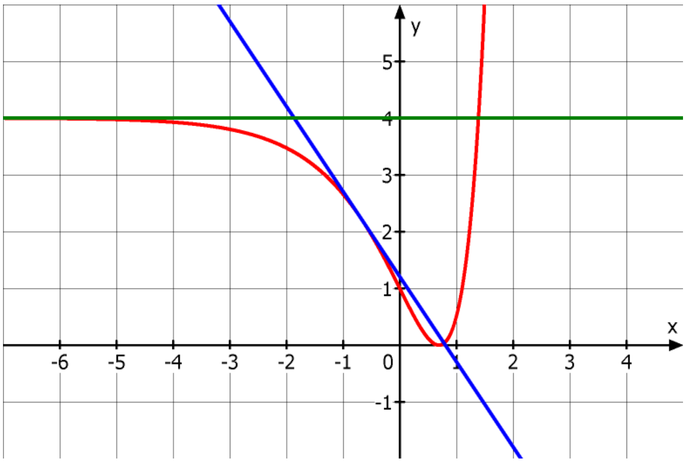
$W\left(-\ln 2 \mid 2{,}25\right)$ it der einzige Wendepunkt des Graphen von f.

c) $f(x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x - 2)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 2 = -2 \vee e^x - 2 = 2$

$\Rightarrow \quad e^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 4$ und damit $S\left(\ln 4 \mid 4\right)$

d) $f'(-\ln 2) = -\frac{3}{2}$ und damit $w: y = -\frac{3}{2}\cdot(x+\ln 2)+2{,}25$

$f(-2) = (e^{-2}-2)^2 \approx 3{,}5$



e) α) Es ist $-\frac{3}{2} \leq m < \infty$

β) Es ist $-\infty < t < 4$

2\. a) Nach dem HDI gilt $I'(x) = f(x) > 0$ und $I'(\ln 2) = f(\ln 2) = 0$

Also ist I in $\mathbb{R}$ streng monozon steigend mit dem Terrassenpunkt $\left(\ln 2 \mid 0\right)$.

b) Es ist $\lim\limits_{x \to -\infty} I(x) = -\infty$

3\. a) $F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 - 4e^x + 4 = (e^x-2)^2$

b) $\int\limits_u^{\ln 4} (4-f(x))dx = \left[4x - \frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x - 4x\right]_u^{\ln 4} = \left(-8+16\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{2u} + e^u\right) =$

$= 8 + \frac{1}{2}e^{2u} - 4e^u$

$\lim\limits_{u \to -\infty} A(u) = 8$

Die unendlich ausgedehnte Fläche zwischen dem Graphen und der Geraden $y = 4$ hateinen endlichen Inhalt.

Grundkurs	**Infinitesmalrechnung II**	**2011**

1. Gegeben ist die Funktion $g : x \to \ln(4 - x^2)$ mit maximalem Defnitionsbereich D_g.

   Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

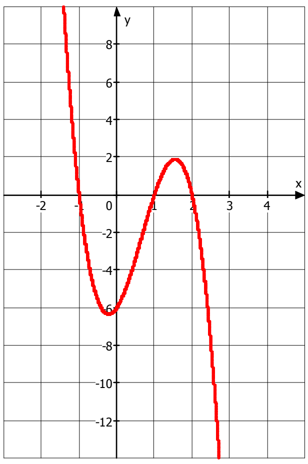
   a) Zeigen Sie, dass $D_g =]-2; 2[$ gilt, und geben Sie das Symmetrieverhalten von Gg an.

   Bestimmen Sie die Nullstellen von g sowie das Verhalten von g an den Rändern von D_g.

   b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g und bestimmen Sie Lage und Art des Ex trempunkts von Gg.

   c) Skizzieren Sie G_g unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

2. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ denierte Funktion $f : x \to -x^3 + 6x^2 + 3x - 6$, die die Nullstellen -1, 1 und 2 besitzt. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f.



   a) Die Tangente t an G_f im Punkt $\left(1 \,|\, 0\right)$ legt mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten ein Dreieck fest. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt A.

$$\left[\text{Ergebnis: } A = 3\right]$$

   b) Berechnen Sie die Inhalte der beiden Flächenstücke, die G_f mit der x-Achse einschließt.

$$\left[\text{Ergebnis: 8 und 1,25}\right]$$

Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $\int_{-1}^{x} f(t)dt$. Der Graph von F wird mit G_F bezeichnet.

c) Begründen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von F , dass F genau eine Nullstelle hat.
Damit ergibt sich, dass F nur die Nullstelle -1 besitzt.

d) Welche Funktionswerte von F lassen sich aus den in Teilaufgabe 2.b) berechneten Flächeninhalten ermitteln? Geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_F an.

Es lassen sich die Funktionswerte an denExtremstellen ermitteln (s. 2.c))

e) Ermitteln Sie unter Verwendung des in Teilaufgabe 2.a) berechneten Flächeninhalts A einen Näherungswert für F(0) .

Skizzieren Sie G_F in der Abbildung zu Aufgabe 2 unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

Lösung

1. a) $4 - x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2$ ergibt $D_g =]-2; 2[$

$$g(-x) = \ln[4-(-x)^2] = \ln(4-x^2) = g(x)$$

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(4-x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-x^2 = 1$$

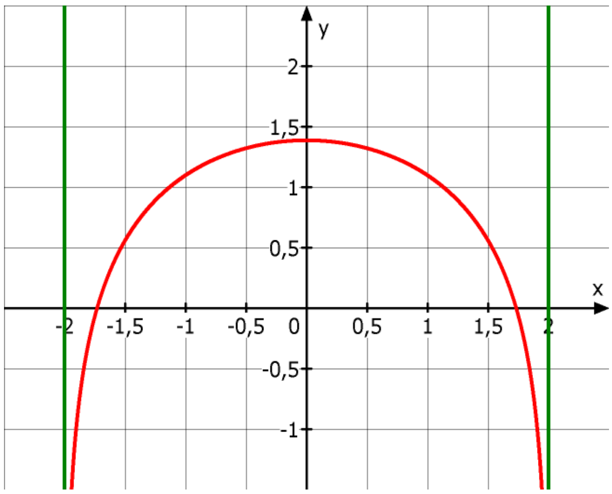
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{3} \vee = \sqrt{3}$$

b)

$$g'(x) = \frac{1}{4-x^2}\cdot(-2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

	$-2<x<0$	$0<x<2$
$g'(x)$	$+$	$-$

c)



---

2. a) $f'(x) = -9x^2 + 12x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 6$

Gleichung der Tangente $t: y = 6\cdot(x-1)+0 = 6x-6$

$$A = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6 = 3$$

b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left[-\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x - 6x\right]_{-1}^{1} =$

$$= \left(-\frac{3}{4}+2+\frac{3}{2}-6\right) - \left(-\frac{3}{4}-2-\frac{3}{2}+6\right) = -8 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 8$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \left[-\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_1^2 =$$

$$= \left(-12 + 16 + 3 - 6\right) - \left(-\frac{3}{4} + 2 + \frac{3}{2} - 6\right) = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad A_1 = 1{,}25$$

c) Für die Montonie von F gilt

	$-\infty < x \leq -1$	$-1 \leq x \leq 1$	$1 \leq x \leq 2$	$2 \leq x < \infty$
Monotonie	sms	smf	sms	smf

Die Extrema von F sind $E_1\left(-1 \mid 0\right)$, $E_2\left(1 \mid -8\right)$ und $E_2\left(2 \mid -6{,}75\right)$

Damit ergibt sich, dass F nur die Nullstelle -1 besitzt.

d) Eassen sich ie Funktionswerte der Extremstllen ermitteln (s. c).

e) $F(0) \approx -8-(-3) = -5$