

Gegeben ist die Funktion  $f : x \rightarrow (e^x - 2)^2$  mit Definitionsmenge  $\mathbb{R}$ .

Ihr Graph wird mit  $G_f$  bezeichnet.

1. a) Geben Sie die Nullstelle von  $f$  an und untersuchen Sie das Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow \infty$ .

b) Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts, das Krümmungsverhalten und die Lage des Wendepunkts von  $G_f$ .

c) Zeigen Sie, dass  $G_f$  und die durch die Gleichung  $y = 4$  gegebene Gerade  $g$  genau einen Schnittpunkt  $S(x_S | y_S)$  besitzen, und bestimmen Sie dessen Koordinaten.

[Teilergebnis:  $x_S = 2 \cdot \ln 2$ ]

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von  $G_f$ .

Berechnen Sie  $f(-2)$  und zeichnen Sie  $G_f$  unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich  $-4 \leq x \leq 1,5$ . Tragen Sie auch die Wendetangente und die Gerade  $g$  ein.

e) Betrachtet wird die Tangente an  $G_f$  in einem Punkt  $P$ , der  $G_f$  durchläuft. Geben Sie jeweils alle Werte an,

$\alpha$ ) die Steigung der Tangente

$\beta$ ) der  $y$ -Achsenabschnitt der Tangente

dabei annimmt.

---

Gegeben ist nun die in  $\mathbb{R}$  definierte Integralfunktion  $I : x \rightarrow \int_{\ln 2}^x f(t) dt$ .

2. a) Bestimmen Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von  $I$  das Monotonieverhalten von  $I$ . Zeigen Sie, dass der Graph von  $I$  einen Terrassenpunkt besitzt und geben Sie dessen Koordinaten an.

b) Geben Sie ohne weitere Rechnung das Verhalten von  $I$  für  $x \rightarrow -\infty$  an.

3. a) Zeigen Sie, dass die Funktion  $F : x \rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x + 4x$  mit der Definitionsmenge  $\mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$  ist.

b) Der Graph  $G_f$  schließt mit den durch die Gleichungen  $f = 4$  bzw.  $x = u$  ( $u < 0$  bestimmten Geraden im I. und II. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt  $A(u)$  ein.

Bestimmen Sie  $A(u)$ .

Ermitteln Sie  $\lim_{u \rightarrow -\infty} A(u)$  und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

### Lösung

$$1. a) f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 2)^2 = (-2)^2 = 4 \text{ weil } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 2)^2 = \infty \text{ weil } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$b) f'(x) = 2 \cdot (e^x - 2) \cdot e^x = 2e^x \cdot (e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

|         |                       |                      |
|---------|-----------------------|----------------------|
| x       | $-\infty < x < \ln 2$ | $\ln 2 < x < \infty$ |
| $f'(x)$ | -                     | +                    |

$T(\ln 2 | 0)$  ist ein Tiefpunkt des Graphen von  $f$

$$f''(x) = 2e^x \cdot (e^x - 1) + 2e^x \cdot e^x = 2e^x \cdot (2e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$f(-\ln 2) = \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 = 2,25$$

|          |                        |                       |
|----------|------------------------|-----------------------|
| x        | $-\infty < x < -\ln 2$ | $-\ln 2 < x < \infty$ |
| $f''(x)$ | -                      | +                     |
|          | RK                     | LK                    |

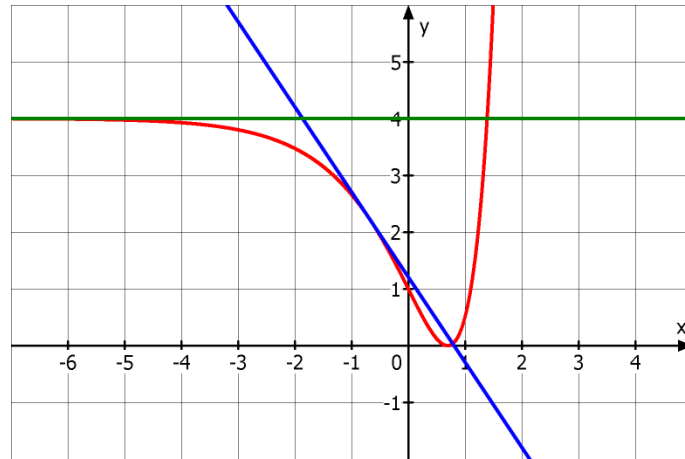
$W(-\ln 2 | 2,25)$  ist der einzige Wendepunkt des Graphen von  $f$ .

$$c) f(x) = 4 \Leftrightarrow (e^x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow e^x - 2 = -2 \vee e^x - 2 = 2$$

$$\Rightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 \text{ und damit } S(\ln 4 | 4)$$

d)  $f'(-\ln 2) = -\frac{3}{2}$  und damit  $w : y = -\frac{3}{2} \cdot (x + \ln 2) + 2,25$

$f(-2) = (e^{-2} - 2)^2 \approx 3,5$



e)  $\alpha)$  Es ist  $-\frac{3}{2} \leq m < \infty$

$\beta)$  Es ist  $-\infty < t < 4$

---

2. a) Nach dem HDI gilt  $I'(x) = f(x) > 0$  und  $I'(\ln 2) = f(\ln 2) = 0$

Also ist  $I$  in  $\mathbb{R}$  streng monoton steigend mit dem Terrassenpunkt  $(\ln 2 | 0)$ .

b) Es ist  $\lim_{x \rightarrow -\infty} I(x) = -\infty$

---

3. a)  $F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 - 4e^x + 4 = (e^x - 2)^2$

b)  $\int_u^{\ln 4} (4 - f(x)) dx = \left[ 4x - \frac{1}{2} e^{2x} + 4e^x - 4x \right]_u^{\ln 4} = (-8 + 16) - \left( -\frac{1}{2} e^{2u} + e^u \right) =$

$= 8 + \frac{1}{2} e^{2u} - 4e^u$

$\lim_{u \rightarrow -\infty} A(u) = 8$

Die unendlich ausgedehnte Fläche zwischen dem Graphen und der Geraden  $y = 4$  hat einen endlichen Inhalt.

---

1. Gegeben ist die Funktion  $g : x \rightarrow \ln(4 - x^2)$  mit maximalem Definitionsbereich  $D_g$ .

Der Graph von  $g$  wird mit  $G_g$  bezeichnet.

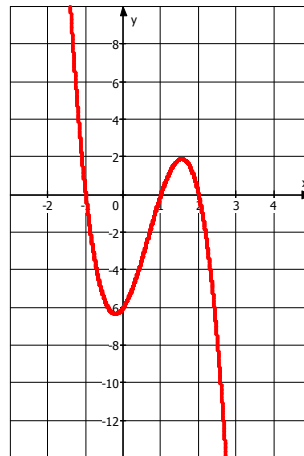
a) Zeigen Sie, dass  $D_g = ]-2; 2[$  gilt, und geben Sie das Symmetrieverhalten von  $G_g$  an.

Bestimmen Sie die Nullstellen von  $g$  sowie das Verhalten von  $g$  an den Rändern von  $D_g$ .

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $g$  und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von  $G_g$ .

c) Skizzieren Sie  $G_g$  unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in einem Koordinatensystem.

2. Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f : x \rightarrow -x^3 + 6x^2 + 3x - 6$ , die die Nullstellen  $-1$ ,  $1$  und  $2$  besitzt. Die Abbildung zeigt den Graphen  $G_f$ .



a) Die Tangente  $t$  an  $G_f$  im Punkt  $(1 \mid 0)$  legt mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten ein Dreieck fest. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt  $A$ .

[ Ergebnis:  $A = 3$  ]

b) Berechnen Sie die Inhalte der beiden Flächenstücke, die  $G_f$  mit der  $x$ -Achse einschließt.

[ Ergebnis: 8 und 1,25 ]

Betrachtet wird nun die in  $\mathbb{R}$  definierte Integralfunktion  $\int_{-1}^x f(t)dt$ . Der Graph von  $F$  wird mit  $G_F$  bezeichnet.

c) Begründen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von  $F$ , dass  $F$  genau eine Nullstelle hat.  
Damit ergibt sich, dass  $F$  nur die Nullstelle  $-1$  besitzt.

d) Welche Funktionswerte von  $F$  lassen sich aus den in Teilaufgabe 2.b) berechneten Flächeninhalten ermitteln? Geben Sie Lage und Art der Extrempunkte von  $G_F$  an.

Es lassen sich die Funktionswerte an denExtremstellen ermitteln (s. 2.c))

e) Ermitteln Sie unter Verwendung des in Teilaufgabe 2.a) berechneten Flächeninhalts  $A$  einen Näherungswert für  $F(0)$ .

Skizzieren Sie  $G_F$  in der Abbildung zu Aufgabe 2 unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

---

**Lösung**

1. a)  $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$  ergibt  $D_g = ]-2; 2[$

$$g(-x) = \ln[4 - (-x)^2] = \ln(4 - x^2) = g(x)$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(4 - x^2) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 1$$

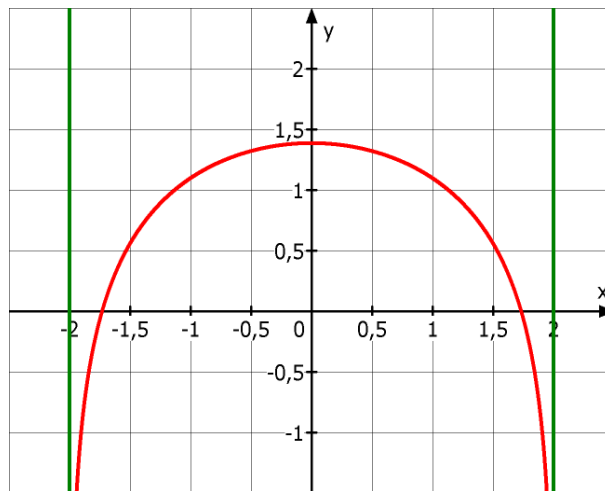
$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

b)

$$g'(x) = \frac{1}{4 - x^2} \cdot (-2x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

|         |              |             |
|---------|--------------|-------------|
|         | $-2 < x < 0$ | $0 < x < 2$ |
| $g'(x)$ | +            | -           |

c)



2. a)  $f'(x) = -9x^2 + 12x + 3 \Rightarrow f'(1) = 6$

Gleichung der Tangente  $t: y = 6 \cdot (x - 1) + 0 = 6x - 6$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 = 3$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 f(x) dx = \left[ -\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x - 6x \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left( -\frac{3}{4} + 2 + \frac{3}{2} - 6 \right) - \left( -\frac{3}{4} - 2 - \frac{3}{2} + 6 \right) = -8 \Rightarrow A_1 = 8$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[ -\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x \right]_1^2 =$$

$$= \left( -12 + 16 + 3 - 6 \right) - \left( -\frac{3}{4} + 2 + \frac{3}{2} - 6 \right) = \frac{5}{4} \Rightarrow A_1 = 1,25$$

c) Für die Monotonie von F gilt

|           | $-\infty < x \leq -1$ | $-1 \leq x \leq 1$ | $1 \leq x \leq 2$ | $2 \leq x < \infty$ |
|-----------|-----------------------|--------------------|-------------------|---------------------|
| Monotonie | sms                   | smf                | sms               | smf                 |

Die Extrema von F sind  $E_1(-1 | 0)$ ,  $E_2(1 | -8)$  und  $E_3(2 | -6,75)$

Damit ergibt sich, dass F nur die Nullstelle  $-1$  besitzt.

d) Lassen sich die Funktionswerte der Extremstellen ermitteln (s. c).

e)  $F(0) \approx -8 - (-3) = -5$

