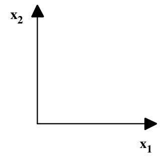
Grundkursabitur 2011	**Analytische Geometrie**	**Aufgabe III**

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A\left(3 \mid 0 \mid 0\right)$, $B\left(0 \mid 3 \mid 0\right)$, $C\left(-3 \mid -3 \mid 0\right)$ und $S\left(0 \mid 0 \mid 6\right)$ gegeben.

1. a) Das Dreieck ABC liegt in der x_1x_2-Ebene.



Zeichnen Sie das Dreieck in ein zweidimensionales Koordinatensystem (vgl. Abbildung) ein. Weisen Sie nach, dass das Dreieck gleichschenklig ist, und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.

Teilergebnis: Flächeninhalt 13,5

b) Die Punkte A, B und S legen die Ebene E fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

$$\left[\text{möglichesErgebnis}: 2x_1 + 2_2 + x_3 - 6 = 0\right]$$

c) Berechnen Sie den Abstand d des Punkts C von der Ebene E:

$$\left[\text{Ergebnis: } d = 6\right]$$

Die Punkte A, B, C und S sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.

In einem Geländemodell stellt die Pyramide einen Berg mit Gipfel S dar; das Dreieck CAS bildet die Südseite, der Rand des Dreiecks ABC den Fuß des Bergs. Der Berg soll, ausgehend von seinem Fuß auf einer geraden Linie bestiegen werden.

2. a) Wo muss gestartet werden, damit der Weg zum Gipfel im Geländemodell einen möglichst kleinen Neigungswinkel gegen die x_1x_2 -Ebene hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

Berechnen Sie die Länge des zugehörigen Wegs im Modell.

b) An welchem Punkt muss gestartet werden, wenn der geradlinige Weg zum Gipfel auf der Südseite verlaufen und möglichst kurz sein soll?

Bestimmen Sie im Geländemodell die Koordinaten dieses Punkts sowie den Neigungswinkel φ des zugehörigen Wegs gegen die x_1x_2-Ebene.

3. a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS .

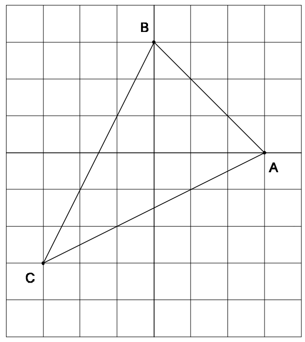
b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ABS gleich groß sind.

c) Die Ebene F enthält den Mittelpunkt der Strecke $\left[AS\right]$ und ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, in dem sich die Pyramide und die Ebene F schneiden; begründen Sie Ihr Vorgehen.

d) Ermitteln Sie die Gleichung einer Geraden, die parallel zur Ebene E verläuft und von dieser den Abstand 3 hat.

Lösung



1\. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

sowie $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overline{AC} = \overline{BC} = 3\sqrt{5}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 27 = 13{,}5$$

b) $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{S} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$$

c) HNF von E: $\dfrac{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6}{3} = 0$

$$d(C; E) = \left| \frac{2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) + 0 - 6}{3} \right| = 6$$

2\. a) $\tan\alpha = \dfrac{d}{\overline{AS'}}$ mit $S'(0 \mid 0 \mid 0)$ und $\tan\alpha = \dfrac{6}{3} = 2$

$\tan\beta = \dfrac{d}{\overline{BS'}} = \dfrac{6}{3} = 2$ und $\tan\gamma = \dfrac{d}{\overline{CS'}} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}}$

Es muss bei C gestartet werden.

$\overline{CS} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 6^2} = 3\sqrt{6} \approx 7{,}35$

b) Es muss vom Fußpunkt des Lotes von C auf CA gestartet werden

Lotebene durch S durch S: $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1+x_2 = 0$

Schnitt mit CA : CA : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ergibt Lotfußpunkt $F\left(0{,}6 \mid -1{,}2 \mid 0\right)$

damit $\tan\varphi = \frac{d}{\overline{FS}} = \frac{6}{2} = 3$ und $\overline{SF} = \frac{1}{5}\sqrt{1013} \approx 6{,}37$

3. a) $V_{ABCS} = \frac{1}{3}\cdot 13{,}5\cdot 6 = 27$

b) C hat von E, so wie S von der Grundfläche, den Abstand 6.

c) $A = \frac{1}{4}\cdot 13{,}5 = 3\frac{3}{8}$ Strahlensatz!

Grundkursabitur 2011	Analytische Geometrie	Aufgabe IV

Auf dem Boden des Mittelmeeres wurde ein antiker Marmorkörper entdeckt, der ersten Unterwasseraufnahmenzufolge die Form eines Pyramidenstumpfs besitzen könnte.

Mithilfe eines Peilungssystem konnte die Lage von sieben der acht Eckpunkte ermittelt und zur weiteren Analyse des Körpers in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft dargestellt werden:

$A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(-6 \mid -12 \mid 12)$ und $C(18 \mid -36 \mid 0)$ sind Eckpunkte der Grundfläche,

$A'(14 \mid -8 \mid 8)$, $B'(12 \mid -12 \mid 12)$, $C'(22 \mid -20 \mid 8)$ und $D'(20 \mid -16 \mid 4)$

die Eckpunkte der Deckfläche (vgl. Abbildung).

a) Zeigen Sie, dass die Deckfläche A'B'C'D' ein Rechteck ist und den Inhalt 72 besitzt.

b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC bei B rechtwinklig ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D, der gemeinsam mit A, B und C die Eckpunkte eines Rechtecks bildet.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Grundfläche ABCD enthält, in Normalenform.

Weisen Sie nach, dass die Deckfläche parallel zur Grundfläche ist und von dieser den Abstand 12 hat.

Durch Berechnungen wird bestätigt, dass der Marmorkörper die Form eines Pyramidenstumpfs hat. Im Modell wird für weitere Überlegungen auch die zum Stumpf gehörige Pyramide mit der Grundfläche ABCD betrachtet.

d) Berechnen Sie die Höhe h dieser Pyramide.

$[\text{Ergebnis: } h = 18]$

e) Bestimmen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfs.

f) Auf besonderes Interesse stößt die Seitenfläche des Marmorkörpers, die im Modell mit BCB'C' bezeichnet wurde. Zeigen Sie, dass die Geraden BC und B'C' den Abstand $6\sqrt{5}$ besitzen und berechnen Sie den Inhalt dieser Seitenfläche im Modell.

g) Um Informationen über den inneren Aufbau des Marmorkörpers zu erhalten, wird er geradlinig durchbohrt - im Modell betrachtet parallel zur x_3-Achse, ausgehend vom Mittelpunkt der Kante $[BB']$.

Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Bohrung aus der Grund-Fläche austritt.

Lösung

a) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'} - \overrightarrow{A'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'} - \overrightarrow{C'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{D'} - \overrightarrow{A'} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'D'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und damit ist A'B'C'D' ein Rechteck.

$A_1 = \overline{A'B'} \cdot \overline{A'D'} = 6 \cdot 12 = 72$

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

ergibt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $E : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A} \right] = 0$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

Es ist $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{B'C'}$ und daher sind Grund- und Deckfläche parallel.

HNF von E: $\dfrac{2x_1 + x_2 + 2x_3}{3} = 0$

$$d = d(A'; E) = \left| \frac{2\cdot 14 + (-8) + 2\cdot 8}{3} \right| = 12$$

d) $AA': \vec{X} = \sigma\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $BB': \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnitt der beiden Geraden gibt die Spitze $S\left(21 \mid -12 \mid 12\right)$ und

$$h = d(S; E) = \left| \frac{2\cdot 21 + 1\cdot(-12) + 2\cdot 12}{3} \right| = 18$$

Flächeninhalt der Grundfläche: $A = \left(\frac{18}{6}\right)^2\cdot 72 = 648$

Volumen des Pyramidenstumpfs: $V = \frac{1}{3}\cdot 648\cdot 18 - \frac{1}{3}\cdot 72\cdot 6 = 3744$

f) Es ist $\overline{BB'} = 18$, $\overline{B'C'} = 12$ und $\overline{BC} = 36$ und damit

$$d(BC; B'C') = \sqrt{18^2 - (\frac{36-12}{2})^2} = 6\sqrt{5}$$

g) Mittelpunkt der Kante $\left[BB'\right]$: $M\left(3 \mid -12 \mid 12\right)$

Bohrung: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + \rho\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $2\cdot 3 + (-12) + 2\cdot(12 + \rho) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = -9$ und damit $T\left(3 \mid -12 \mid 3\right)$
