Grundkursabitur 2006	Analytische Geometrie	Aufgabe VI

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3 \mid -2 \mid 3)$, $B(3 \mid 2 \mid 3)$, $C(6 \mid 2 \mid 7)$ und $D(6 \mid -2 \mid 7)$ sowie die Gerade

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

gegeben.

1. a) Bestimmen Sie die Normalenform der Ebene H, die durch die Punkte A, B und C festgelegt wird. Beschreiben Sie die Lage von H im Koordinatensystem.

   b) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein ebenes Rechteck mit dem Flächeninhalt 20 ist.

   c) Berechnen Sie den Schnittpunkt E der Geraden g mit der Ebene H.

   Zeigen Sie, dass E auf der Halbgeraden [AB, aber nicht auf der Strecke [AB] liegt.

   d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $F \in$ [BA so, dass das Viereck ECDF ein achsensymmetrisches Trapez ist.

   e) Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Trapezes und zeigen Sie, dass es den Flächeninhalt 40 hat.

---

2. Der Schnittpunkt S der Geraden g mit der x_1x_3- Ebene ist die Spitze einer Pyramide mit dem Trapez ECDF als Grundfläche.

   a) Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide.

   b) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.

   Platzbedarf: eine ganze Seite; Ursprung in der Blattmitt

   c) Begründen Sie, dass die Pyramide bei der Spiegelung an einer geeigneten Ebene in sich abgebildet wird und geben Sie eine Gleichung dieser Symmetriebene in Normalenform an.

Lösung

1. a) Parameterform von h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau' \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von H: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Normalenform von H: $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 4x_1 - 3x_3 - 3 = 0$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit ist ABCD ein Parallelogramm.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Also ist ABCD ein Rechteck.

$\overline{AB} = 4$ und $\overline{AD} = 5$ ergibt $A_{ABCD} = 20$.

c) g in H: $4 \cdot (5 + \lambda) - 3 \cdot (9 + 3\lambda) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$ und damit $E\left(3 \mid 6 \mid 3\right)$-

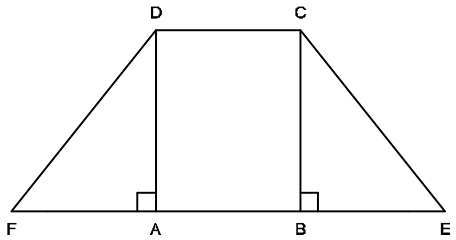
$AB: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegen $\lambda = 2 > 1$ liegt E auf der Halbgeraden [AB, aber nicht auf der Strecke [AB].

d) $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\tan\varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{FA}} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 51{,}3° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 51{,}3° \quad \Rightarrow \quad \delta = \gamma \approx 128{,}7°$

$$A_{ECDF} = \frac{1}{2}\cdot(\overline{FE}+\overline{DC})\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}\cdot(12+4)\cdot 5 = 40$$



---

2. a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\9\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$x_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 1$ und damit $S\left(6\,|\,0\,|\,12\right)$.

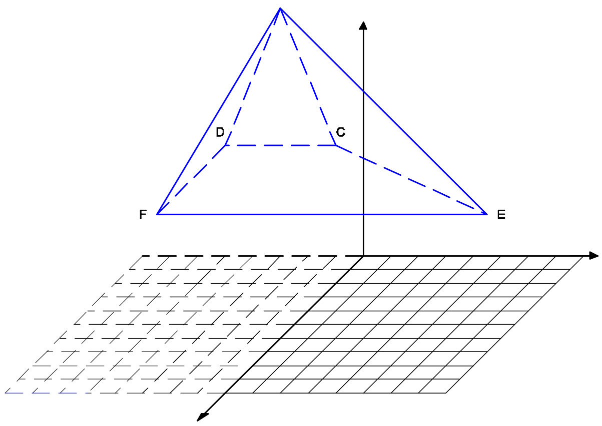
Lot von S auf H: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\0\\12\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$

Schnitt mit H: $4\cdot(6+4\mu) - 3\cdot(12-3\mu) - 3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mu = 0{,}6$

Ist P der Lotfußpunkt, dann ist

$$\overrightarrow{SP} = 0{,}6\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{SP} = 0{,}5\cdot 5 = 3 \quad\Rightarrow\quad V_{ECDF} = \frac{1}{3}\cdot 40\cdot 3 = 40$$

b)



c) FECD ist symmetrisch zur x_1x_3-Koordinatenenene und S liegt in dieser Ebene.

Gleichung: $x_2 = 0$

Grundkursabitur 2007	Analytische Geometrie	Aufgabe V

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

$A(8\mid 2\mid 0)$, $B(8\mid 3\mid 2)$, $C(8\mid -3\mid 2)$ und $D(8\mid -2\mid 0)$ sowie der Punkt $B'(0\mid 3\mid 2)$

gegeben.

1.a) Die Punkte A, B und B' spannen eine Ebene E auf.

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

b) Begründen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist, und tragen Sie es in ein Koordinatensystem ein.

Welche Symmetrieeigenschaft und welche besondere Lage im Koordinatensystem hat das Trapez?

c) Der Punkt A' ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der x_2-Achse.

Berechnen Sie die Koordinaten von A'. Weisen Sie nach, dass das Dreieck DAA' rechtwinklig ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D' so, dass das Viereck DAA'D' ein Rechteck ist.

d) Der Punkt C' entsteht durch Spiegelung des Punktes B' an der x_1x_3-Ebene.

Geben Sie die Koordinaten von C' an und zeichnen Sie das Prisma ABCDA'B'C'D' in die Zeichnung von Teilaufgabe 1.b) ein.

---

2. Beim dem in Teilaufgabe 1.d) genannten Prisma handelt es sich um ein gerades Prisma (Nachweis nicht erforderlich).

Dieses Prisma gibt die Form eines 16m langen Stücks eines Kanals wieder (1 LE in der Zeichnung entspricht 2m).

a) Berechnen Sie den Neigungswinkel α der Kanalböschung AA'B'B gegenüber der horizontalen Ebene.

b) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser das 16m lange Kanalstück enthält, wenn der Kanal bis oben gefüllt ist.

c) Während einer Hitzeperiode führt das 16m lange Kanalstück nur noch 45% der in Teilaufgabe 2.b) bestimmten Wassermenge.

Weisen Sie zunächst allgemein nach, dass zwischen der Wassertiefe t des Kanals und der zugehörigen Breite b der Wasseroberfläche - jeweils gemessen in m - folgender Zusammenhang besteht: $b = t + 8\text{m}$.

Berechnen Sie anschließend die Wassertiefe des Kanals in der Hitzeperiode.

Lösung

1.a) Parametergleichung: E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} = -8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenform: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \left[\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 - x_3 - 4 = 0$

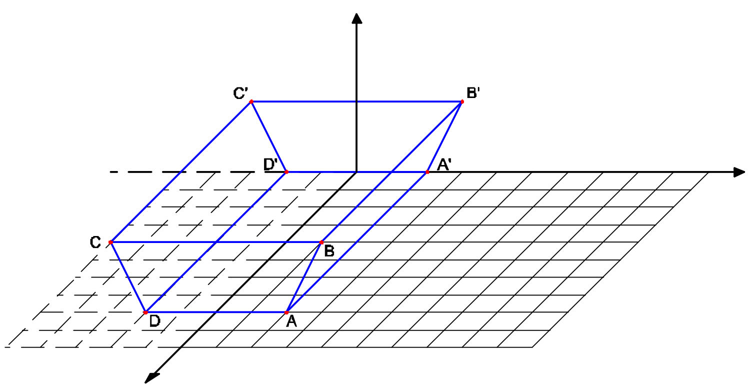
b) A und D bzw. B und C liegen symmetrisch zur x_1x_3-Koordinatenebene und damit ist das Viereck ABCD ein achsensymmetrisches Trapez.

c) $x_1 = x_3 = 0$ in E ergibt $x_2 = 2$ und damit $A'\left(0 \mid 2 \mid 0\right)$.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle A'AD = 90°$.

$\overrightarrow{D'} = \overrightarrow{D} + \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $D'\left(0 \mid -2 \mid 0\right)$

d) Es ergibt sich $C'\left(0 \mid -3 \mid 2\right)$.



2. a) $\tan\alpha = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 67°$

b) $V = \frac{1}{2} \cdot (8m + 12m) \cdot 4m \cdot 16m = 640m^3$

c) $\Delta b = \frac{\overline{BC} - \overline{AD}''}{2}$

$\frac{t}{\Delta b} = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta b = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad b = 8m + 2 \cdot \Delta b = 8m + t$

$\frac{1}{2} \cdot (8m + 8m + t) \cdot t \cdot 16m = 480m^3 \quad \Rightarrow \quad t \approx 3{,}1m$

Abitur 2008	Analytische Geometrie	Aufgabe V

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $P(-8\,|-4|1)$ und

$P(7\,|8|17)$ sowie die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. a) Bestimmen Sie den Geradenpunkt R zum Parameterwert $\lambda = 30$ und zeigen Sie, dass Q nicht auf der Gerade g liegt.

   b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die den Punkt Q und die Gerade g enthält in ***Normalenform***. Welche ***besondere Lage*** hat diese Ebene im Koordinatensystem ?

   c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F(7|\,-4\,|\,1)$ Fußpunkt des Lotes von Q auf die Gerade g ist. Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes Q von der Gerade .
   $\left[\text{Ergebnis} : d = 20\right]$

   d) Der Punkt Q' entsteht durch ***Spiegelung*** des Punktes Q an der Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q'.

   e) Begründen Sie, dass das Viereck QPQ'R eine ***Raute*** ist, und ermitteln Sie deren Flächeninhalt. Fertigen Sie dazu eine Skizze an, die die gegenseitige Lage der Geraden g und der Punkte Q, P, Q' und F veranschaulicht.

   Wählen Sie hierfür die Ebene E als Zeichenebene.

   f) Berechnen Sie alle ***Innenwinkel*** der Raute und den Abstand h paralleler Rautenseiten.

---

2. In der Ebene E liegt ein Gitter mit kongruenten rautenförmigen Öffnungen. Eine dieser Rauten ist ein Viereck QPQ'R. Zudem ist eine Kugel mit dem Radius $r = 13$ gegeben.

   a) Begründen Sie, dass diese ***Kugel*** nicht durch die Gitteröffnungen passt.

   b) Die Kugel liegt so in der Öffnung QPQ'R, dass sie alle 4 Seiten dieser Raute berühre.

   Berechnen Sie den ***Abstand*** des Kugelmittelpunkts von der Gitterebene E.

Lösung

1. a) $\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 30 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt $R\left(22 \mid -4 \mid 1\right)$.

Q in g : (1) $7 = -8+\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = 15$ (2) $8 = -4$ (f)

Q liegt also nicht auf der Geraden g.

b) Paramenterform von E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalenvektor : $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Normalenform von E : $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x_2 - 3x_3 + 19 = 0$

Die Ebene E ist parallel zur x_1-Achse des Koordinatensystems.

c) $\overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{QF} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

F in g : (1) $7 = -8+\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 15$ (2) $-4 = -4$ (w) (3) $1 = 1$ (w)

Also ist F Fußpunkt des Lotes von Q auf g.

$d(Q;\, g) = \overline{QF} = \sqrt{(-12)^2 + 16^2} = 20$

d) $\overrightarrow{Q'} = \overrightarrow{Q} + 2 \cdot \overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ 49 \end{pmatrix}$

e)

Es genügt zu zeigen, dass F der Mittelpunkt $\left[PR\right]$ ist.

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}-8\\-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}22\\-4\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$$

$\overline{PQ} = 30$ ergibt $A_{QPQ'R} = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 40 = 600$

f) Es ist $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \gamma \approx 106° \;\; \beta = \delta \approx 74°$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}15\\12\\16\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{PQ} = \sqrt{15^2+12^2+16^2} = 25 \quad\Rightarrow\quad h = \frac{A_{QPQ'R}}{\overline{PQ}} = \frac{600}{24} = 24$$

---

2. a) $2r = 26 > 24$

b) $d(M;E) = \sqrt{13^2-12^2} = 5$

Grundkursabitur 2008	Analytische Geometrie	Aufgabe VI

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(1\,|\,2\,|\,0)$, $B(3\,|\,0\,|\,2)$ und $C(5\,|\,5\,|\,2)$ ein Dreieck in einer Ebene E fest.

Die Gerade g enthält den Punkt B und besitzt den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ***gleichschenklig*** ist und berechnen Sie alle ***Innenwinkel*** des Dreiecks.

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F(2\,|\,1\,|\,1)$ ***Mittelpunkt*** der Strecke $[AB]$ ist und ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G in ***Normalenform***, bezüglich der die Punkte A und B zueinander symmetrisch sind.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene G.

d) Bestätigen Sie, dass die Gerade FS senkrecht auf der Ebene E steht und begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Punkt F auf dem Kreis in der Ebene G mit Durchmesser $[SC]$ liegt.

---

2. a) Bei der Rotation des rechtwinkligen Dreiecks FCS um die Achse FS entsteht ein gerader ***Kegel*** K_1. Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels.

b) Der Kegel K_1 schneidet die Kegel die Ebene G im Dreieck CSC^*.

Berechnen Sie die Koordinaten von C^* und zeichnen Sie das Dreieck CSC^* in wahrer Größe (1 LE entspricht 1 cm; sinnvolle Rundung der Längen).

c) Es sei r der Radius der größten Halbkugel mit Grundfläche in E, die dem Kegel K_1 einbeschrieben werden kann.

Beschreiben Sie einen Weg zur rechnerischen Bestimmung von r (Rechnungen nicht erforderlich).

d) Lässt man das Dreieck FCS um die Achse FC rotieren, so entsteht ein Kegel K_2.

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass folgende Schlussfolgerung falsch ist:

Weil bei K_2 im Vergleich zu K_1 Höhe und Grundkreisradius nur vertauscht sind, müssen K_1 und K_2 das gleiche Volumen besitzen.

Lösung

1. a) Seiten : $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CA} = \sqrt{29}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CB} = \sqrt{29}$

Winkel : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 23$ und damit $\cos\gamma = \frac{23}{29} \Rightarrow \gamma \approx 37{,}5° \Rightarrow \alpha = \beta \approx 71{,}2°$

b) $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{f}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$G : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0$

$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

g in E : $(3 - 2\lambda) - \lambda + (2 + 2\lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$

Eingesetzt ergibt sich $\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt $\overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$.

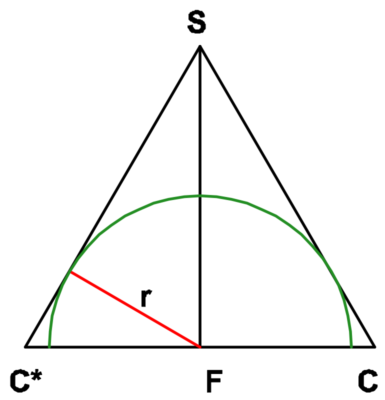
Da G SymmetrieEbene von $[AB]$ ist, steht ergibt sich $SF \perp E$.

Es ist $\measuredangle CFS = 90°$. Also liegt F auf dem Thaleskreis über $[CS]$:

----

2. a) $\overline{CF} = \sqrt{26}$ und $\overline{SF} = \sqrt{78}$ und damit $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 26\sqrt{78}$

b) $\overrightarrow{F} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{C} + \overrightarrow{C'}\right) \Rightarrow \overrightarrow{C'} = 2 \cdot \overrightarrow{F} - \overrightarrow{C} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$



c) r ist der Abstand des Punktes F von der Geraden CS bzw. C^*S:

d) Das Volumen eines Kegel hängT quadratisch vom Radius und linear von der Höhe ab.

Außer im Fall $h = r$ ändert sich daher das Volumen.

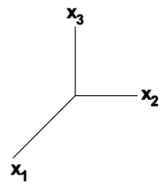
Grundkursabitur 2009	**Analytische Geometrie**	**Aufgabe V**

1. In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A\left(-3 \mid 4 \mid 0\right)$ und $C\left(-2 \mid 1 \mid 2\right)$.

   a) Die Punkte 0, A und C legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

   b) Z sei der Mittelpunkt der Strecke [AC]. Durch Spiegelung des Ursprungs 0 an Z entsteht der Punkt B. Berechnen Sie die Koordinaten von B.

   c) Berechnen Sie den Innenwinkel φ des Vierecks OABC bei O und begründen Sie, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist.

   Zeichnen Sie das Parallelogramm in ein Koordinatensystem ein.

   (vgl. Skizze; Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende : $-1 \leq x_3 \leq 11$)

   d) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden $g = AB$ auf. Welche besondere Lage im Koordi natensystem hat g ?

   Das Lot vom Punkt C auf die Gerade g schneidet g im Punkt F.

   Berechnen Sie die Koordinaten von F. Zeichnen Sie das Lot in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe l.c) ein.

   e) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms OABC $5\sqrt{5}$ beträgt.

---

2. Das Parallelogramm OABC aus Aufgabe 1 sei nun die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide, deren Spitze S auf der positiven x_3-Achse liegt.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S so, dass die Pyramide OABCS den Rauminhalt 50 besitzt. Zeichnen Sie die Pyramide in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe l.c) ein.

   b) Die Pyramide rotiert nun um ihre Kante OS. Der Eckpunkt B bewegt sich dabei auf einem Kreis. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M dieses Kreises an und berechnen Sie seinen Radius r.

   c) Begründen Sie, dass der Punkt C im Inneren des in Teilaufgabe 2.b) beschriebenen Rotationskörpers liegt.

Lösung

1. Gegeben : $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(-3\,|\,4\,|\,0)$ und $C(-2\,|\,1\,|\,2)$

a) $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ und damit $E : \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0$

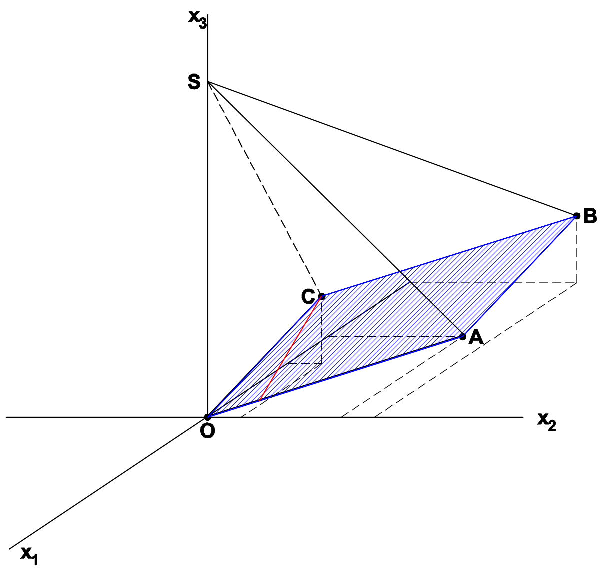
b) $\vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} \right) = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{o} + \vec{b} \right) \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = 2 \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$B(-5\,|\,5\,|\,2)$ ist also der gesuchte Punkt.

c) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ergibt $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{\overline{OA} \cdot \overline{OC}} = \dfrac{10}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 48{,}2°$

Ferner ist $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ und OABC mithin ein Parallelogramm.



d) Gerade OA . $\vec{x} = \delta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

OA verläuft in der x_1x_2-Ebene und geht durch den Ursprung.

Ansatz für die Lotebene L zu AB durch C : $-3x_1 + 4x_2 + n_4 = 0$

C eingesetzt : $-3\cdot(-2) + 4\cdot 1 + n_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_4 = -10$

Schnitt mit L : $-3\cdot(-3\delta) + 4\cdot 4\delta - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0{,}4$

Ortsvektor des Lotfußpunkts : $\vec{f} = 0{,}4\cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{CF} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\overline{OA} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$A_{OABD} = 5\sqrt{5}$

---

2. a) $V = \frac{1}{3} G\cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{G} = \frac{50}{5\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

Der Abstand von $S\left(0 \mid 0 \mid s_3\right)$ zur Ebene E ist also gleich $\frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$. Damit muss gelten

$$\left| \frac{8\cdot 0 + 6\cdot 0 + 5\cdot s_3}{\sqrt{125}} \right| = \frac{10}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad s_3 = 10$$

b) Es ist $M\left(0 \mid 0 \mid 2\right)$ und $r = \overline{MB} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

c) Est ist $\overline{MC} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 5\sqrt{2}$.

Da B und C die gleiche x_3-Koordinate haben liegt C sogar im Kreis um M mit Radius r.

Grundkursabitur 2009	Analytische Geometrie	Aufgabe VI

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2\,|\,0\,|\,1)$, $B(2\,|\,-2\,|\,0{,}5)$ und $C(0\,|\,-4\,|\,1)$ sowie die Ebene $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ gegeben.

1. a) A, B und C legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform sowie in Normalenform.

   b) Bestätigen Sie, dass die Gerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ die Schnittgerade der Ebenen E und F ist, und begründen Sie, dass s in der x_1x_3-Koordinatenebene liegt.

   c) Zeigen Sie, dass die Punkte $R(4\,|\,0\,|\,0)$ und $S(0\,|\,0\,|\,2)$ auf der Geraden s liegen und dass die Punkte $T(0\,|\,-8\,|\,0)$ beziehungsweise $U(0\,|\,4\,|\,0)$ die Schnittpunkte der Ebene E beziehungsweise der Ebene F mit der x_2-Achse sind.

   d) Zeichnen Sie die Punkte R, S, T und U sowie die Gerade s in ein Koordinatensystem ein und veranschaulichen Sie die Lage der Ebenen E und F durch Einzeichnen ihrer Spurgeraden.

---

2. In einem Geländemodell liegen die Hänge eines Bergrückens in den Ebenen E und F. Der Grat dieses Bergrückens wird von einem Teil der Geraden s gebildet. Die x_1-Achse zeigt in Südrichtung, die x_2-Achse in Ostrichtung.

   Vom Punkt B aus wird horizontal ein Tunnel in Ostrichtung durch den Berg bis zur Ebene F gebohrt.

   a) Berechnen Sie die Länge des Tunnels im Geländemodell.

   b) Vom Punkt $P(2\,|\,p_2\,|\,p_3)$ der Geraden TR soll in der Ebene E eine geradlinige Zufahrtsstraße zum Tunneleingang B angelegt werden.

   Berechnen Sie die Koordinaten von P und begründen Sie, dass diese Zufahrt zum Tunneleingang B bergauf und genau von Westen nach Osten verläuft.

   c) Berechnen Sie für diese Zufahrtsstraße von P nach B den Neigungswinkel α gegen die Horizontale. Beschreiben Sie mit kurzer Begründung, in welchem Punkt L der Strecke [TR] die steilstmögliche geradlinige Zufahrtsstraße zum Tunneleingang B beginnen würde.

   Hinweis: Die Koordinaten von L müssen nicht berechnet werden.

Lösung

1.a) Parameterform von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalenform: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$

b) $E + F$: $3x_1 + 6x_3 - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_3 - 4 = 0$

Parametrisierung: $x_3 = \sigma$: $x_1 = 4 - 2\sigma$

Eingesetzt in E: $2 \cdot (4 - 2\sigma) - x_2 + 4\sigma - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 0$

Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Den Punkt R erhält man für $\sigma = 0$ und S für $\sigma = 2$.

$x_1 = x_3 = 0$ in E eingesetzt ergibt $-x_2 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -8$

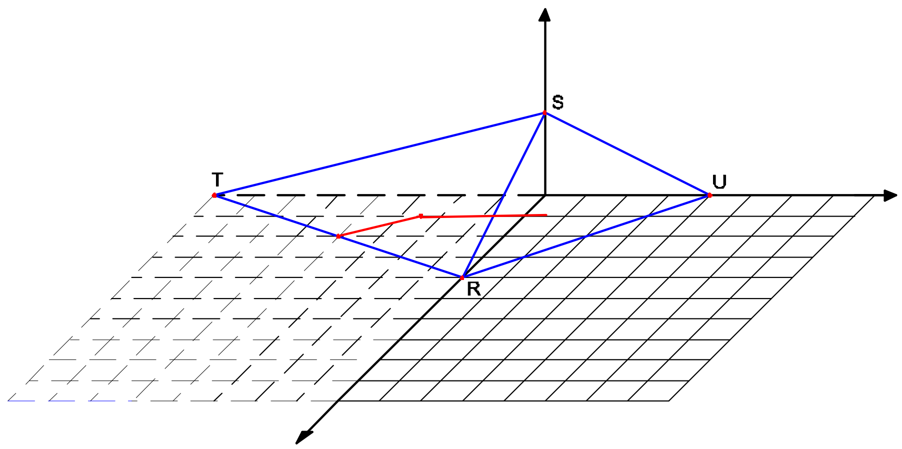
und damit ergibt sich $T(0 \mid -8 \mid 0)$.

$x_1 = x_3 = 0$ in F eingesetzt ergibt $x_2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 4$

und damit ergibt sich $U(0 \mid 4 \mid 0)$.

Jeder Punkt auf s hat die x_2-Koordinate 0 und liegt daher in der x_1x_3-Koordinatenebene.

d)



---

2. a) Tunnelgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnitt mit F ergibt des Tunnelausgang $B'\left(2 \mid 1 \mid 0,5\right)$

$$\overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{BB'} = 4$$

b) Gerade TR: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Punkt P ergibt sich für $\rho = 2$ zu $P\left(2 \mid -4 \mid 0\right)$.

Tunnelauffahrt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

Aus den Koordinaten des Richtungsvektors ergibt sich die Behauptung.

c) $\tan\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \approx 26,6°$

L ergibt sich als Fußpunkt des Lotes von B auf TR.

Grundkursabitur 2010	Analytische Geometrie	Aufgabe V

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-3\,|\,2\,|\,-1)$, $B(-1\,|\,-1\,|\,-3)$ und $S(3\,|\,7\,|\,-11)$

sowie die Geraden $g = AB$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h ***echt parallel*** zueinander sind. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Geraden g und h enthält, in ***Normalenform***.

   b) Bestimmen Sie die ***Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes*** vom Punkt S auf die Ebene E sowie den ***Abstand d*** des Punktes S von der Ebene E.

   c) Bestimmen Sie die Größe der ***Innenwinkel*** des Dreiecks ABS.

   Elementargeometrische Rechnung ist möglich, das das Dreieck bei B rechtwinklig ist.

   d) Berechnen Sie den Abstand $d(g;\,h)$ der Geraden g und h.

---

2. Lässt man das Dreieck ABS um die Achse BS rotieren, so entsteht als Rotationskörper ein ***Kegel*** K_1.

   a) Berechnen Sie das ***Volumen*** von K_1.

   b) Untersuchen Sie, ob die Gerade h mit dem Kegel K_1 gemeinsame Punkte besitzt.

   c) Eine Ebene , die parallel zur Ebene E liegt, zerlegt den Kegel in einen Kegel K_1 und einen ***Kegelstumpf***.

   Die Höhe des Kegelstumpfs beträgt ein Drittel der Höhe des Gesamtkegels .

   Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens des Kegelstumpfs am Volumen des Kegels .

   d) Gegeben ist ein Punkt P, dessen Abstand von der Ebene E kleiner als 12 ist. Es soll entschieden werden, ob der Punkt P auf der Mantelfläche des Kegels K_1 liegt.

   Beschreiben Sie hierfür ein mathematisches Vorgehen unter der Annahme, dass die Koordinaten von P bekannt sind.

Lösung

1\. a) g: $\vec{x} = \vec{A} + \mu\cdot\left(\vec{B} - \vec{A}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Da die Richtungsvektoren von g und h linear abhängig sind, sind die beiden Geraden parallel

Ebene E in Parameterform: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix} = 17\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalenform: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 - 3 = 0$

b) Lotgerade: k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} + \kappa\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

k die Ebene E eingesetzt: $3 + \kappa + 2\cdot(7 + 2\kappa) - 2\cdot(-11 - 2\kappa) - 3 = 0 \quad\Rightarrow\quad \kappa = -4$

$\kappa = -4$ in k eingesetzt ergibt $F = B\left(-1 \mid -1 \mid 3\right)$

$d\left(S; E\right) = \overline{SF} = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 8^2} = 12$

c) $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{AB} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$

$\tan\alpha = \dfrac{12}{\sqrt{17}} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 71{,}0° \quad\Rightarrow\quad \gamma \approx 19{,}0°$

d) Ebene durch A senkrecht zu g und g:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10 = 0$$

Schnitt mit h: $-2\cdot(7-2\lambda)+3\cdot(4+3\lambda)+2\cdot(6+2\lambda)-10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9\lambda = 0$

Schnittpunkt ist also der Aufpunkt C d. h.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d(g;\, h) = \overline{AC} = \sqrt{173} = 3\sqrt{17}$$

Alternativ:

Verbindungsvektor von A zum Aufpunkt C von h: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Inhalt A des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ auf gespannten Parallelogramms:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -34 \\ 34 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{A} = 51$$

Länge der Grundlinie: $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

Abstand der Geraden g und h: $d(g;\, h) = \dfrac{\mathsf{A}}{\overline{AB}} = \dfrac{51}{\sqrt{17}} = 3\sqrt{17}$

---

2. a) $\mathsf{V} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 17\cdot 12 = 112\pi$

b) $r = \sqrt{17} < 3\sqrt{17}$

Die Gerade h schneidet den Kegel nicht.

c) Volumen von K_2: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \mathsf{V} = \frac{8}{27}\mathsf{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathsf{V}_{\text{Stumpf}}}{\mathsf{V}} = \frac{19}{27} \approx 70{,}4\%$

d) Man bestimmt den Schnittpunkt der Geraden SP mit der Ebene E und berechnet den Abstand des Schnittpunkts vom Mittelpunkt B des Grundkreises.

Wenn dieser Abstand gleich dem Radius des Kegels ist, dann liegt P auf dem Kegelmantel.

Grundkursabitur 2010	Analytische Geometrie	Aufgabe VI

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A\left(7\,|\,5\,|\,1\right)$,

$B\left(2\,|\,-5\,|\,6\right)$ und die Gerade g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass der Punkt B nicht auf der Geraden g liegt.

   b) Die Ebene E enthält den Punkt B und die Gerade g. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in ***Normalenform***.

   Welche ***besondere Lage im Koordinatensystem*** hat die Ebene E?

   c) Der Punkt C ist ***Fußpunkt des Lotes*** vom Punkt B auf die Gerade g. Berechnen Sie die Koordinaten von C.

   d) M ist der ***Mittelpunkt*** der Strecke . K ist die Kugel mit Mittelpunkt M und Radius $\frac{1}{2}\overline{AB}$.

   Begründen Sie, dass die Gerade g die Kugel K in den Punkten A und C schneidet.

---

2. Durch ***Verschiebung*** der Punkte A, B und C um den Vektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ entstehen die Punkte A',

   B' und C'.

   Verbindet man die entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke ABC und A'B'C', so entsteht das ***Prisma*** ABCA'B'C'.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A' und zeichnen Sie das Prisma ABCA'B'C in ein Koordinatensystem ein.

   (vgl. Skizze; Platzbedarf: ganze Seite; Ursprung in Blattmitte)

   b) Zeigen Sie, dass der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{AA'}$ zur Grundfläche ABC senkrecht steht, und bestimmen Sie das ***Volumen*** des Prismas.

   c) Das Rechteck ist AA'BB' eine Seitenfläche des Prismas.

   Die ***Diagonalen*** des Rechtecks schneiden sich im Punkt N. Begründen Sie, dass alle Ecken des Prismas auf einer Kugel um N liegen.

   d) Geben Sie zwei Punkte an, die zusammen mit C eine Ebene festlegen, die das Prisma in zwei volumengleiche Teile teilt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

1.a) B eingesetzt ergibt

(1) $2 = 7+\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -5$

(2) $-5 = 5+2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -5$

(3) $6 = 1$ Widerspruch!

B liegt nicht auf der Geraden g.

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}5\\10\\5\end{pmatrix}$ oder besser E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix} + \sigma'\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \tau'\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

Normalenform von E: $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 - x_2 - 9 = 0$

Die Ebene ist parallel zur x_3-Achse.

Lotebene durch B zu g: $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\-5\\6\end{pmatrix}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 + 8 = 0$

Schnitt mit g: $7+\lambda+2\cdot(5+2\lambda)+8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -5$

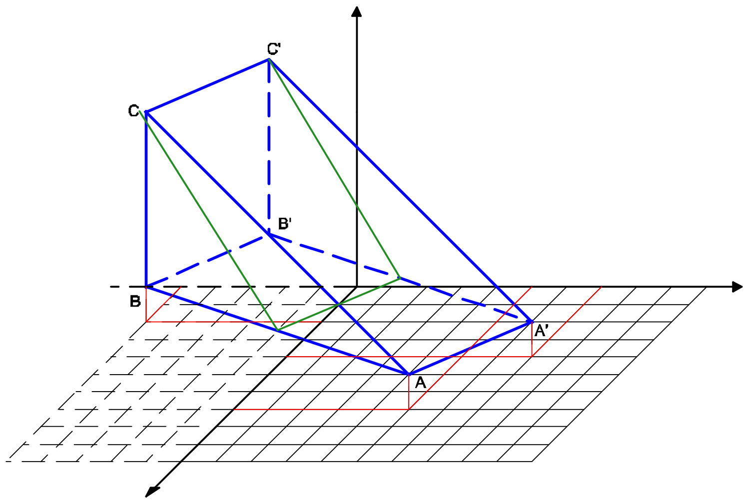
In g eingesetzt ergibt sich $C\left(2 \mid -5 \mid 1\right)$

d) Die Kugel geht durch A und A ist der Aufpunkt der Geraden g.

C liegt auf g und $\angle BCA = 90°$. Also liegt C auf dem Thaleskreis über der Strecke $\left[AB\right]$ und damit auf der gegebenen Kugel.

---

2. a) $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$



b) $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigt,

dass der Verschiebungsvektor auf der Grundfläche ABC senkrecht steht.

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CA} = 5\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CB} = 5$$

$$\overrightarrow{AA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AA'} = 2\sqrt{5}$$

$$V_{ABCA'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{5} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5} = 125$$

c) Das Prisma ABCA'B'C lässt sich zu einem Quader mit Mittelpunkt N ergänzen. Daher liegen die Eckpunkte des Prismas auf einer Kugel um N.

d) Die Ebene durch C, C' und den Mittelpunkt von $\left[AB\right]$ teilt das Prisma in zwei gleich große Hälften.

Begründung:

Die Ebene halbiert die Grundfläche des Prisma und dieses damit in zwei gleich große Hälften.