

Gegeben ist die Funktion $f: x \rightarrow \frac{1-x}{1+x}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an.
- b) Die Terme der gebrochen-rationalen Funktionen g und h haben den gleichen Zähler wie $f(x)$, aber jeweils einen anderen Nenner.

Geben Sie je einen möglichen Funktionsterm für g und h an, so dass im jeweils maximalen Definitionsbereich gilt:

- Der Graph von g hat keine senkrechte Asymptote.

- Die Funktion h hat an der Stelle $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

2. a) Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f an und untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f .

- b) Berechnen Sie $f(3)$, $f(-2)$ und $f(-5)$. Zeichnen Sie G_f sowie die Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

3. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion von f .

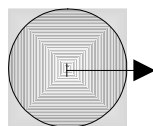
Was lässt sich aus dem Ergebnis hinsichtlich der Symmetrie von f folgern?

4. a) Bestätigen Sie, dass die Funktion $F: x \rightarrow -x + 2 \cdot \ln(x+1)$ für $x \in]-1; \infty[$ eine Stammfunktion von f ist.

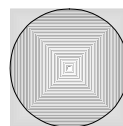
- b) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass G_f im I. Quadranten den Viertelkreis um den Koordinatenursprung mit Radius 1 in zwei etwa inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

Die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 3 können im Folgenden verwendet werden.

5. Eine Kugel A der Masse 1 kg bewegt sich nach rechts und stößt mit der Geschwindigkeit v elastisch und zentral auf eine gleich große ruhende Kugel B.



Kugel A



Kugel B

Die Maßzahl der Geschwindigkeit der Kugel A in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ unmittelbar nach dem Zusammenstoß wird durch die Funktion $v: m \rightarrow \frac{1-m}{1+m}$ mit $m \in \mathbb{R}^+$ beschrieben, wobei m für die Maßzahl der Masse der Kugel B in kg steht.

Zu einer Bewegung nach rechts gehören positive Geschwindigkeiten, zu einer Bewegung nach links negative Geschwindigkeiten.

a) Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß bewegt, wenn die Masse der Kugel B 0,6 kg beträgt.

Geben Sie die Grenzwerte der Funktion v für $m \rightarrow 0$ sowie $m \rightarrow +\infty$ an und machen Sie für diese beiden Grenzfälle jeweils den Bewegungsablauf der Kugel A im Sachzusammenhang plausibel.

b) Ermitteln Sie, für welche Werte von m sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß nach rechts bewegt.

Berechnen Sie, für welchen Wert von m sich die Kugel A unmittelbar nach dem Stoß mit nach links bewegt.

Lösung

$$1. a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = -1 \text{ da } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1-x}{1+x} = \infty \text{ da } \lim_{x \rightarrow -1+0} (1+x) = 0+0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow -1+0} (1-x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1-x}{1+x} = -\infty \text{ da } \lim_{x \rightarrow -1-0} (1+x) = 0-0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow -1-0} (1-x) = 2$$

$x = -1$ ist ein pol einfacher Ordnung.

Waagrechte Asymptote: $y = -1$

Senkrechte Asymptote: $x = -1$

b) h mit $g(x) = \frac{x-1}{1+x^2}$ hat keine Definitionslücke und damit keine senkrechte Asymptote und

h mit $h(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$ hat an der Stelle $x = -1$ einen Pol gerader Ordnung.

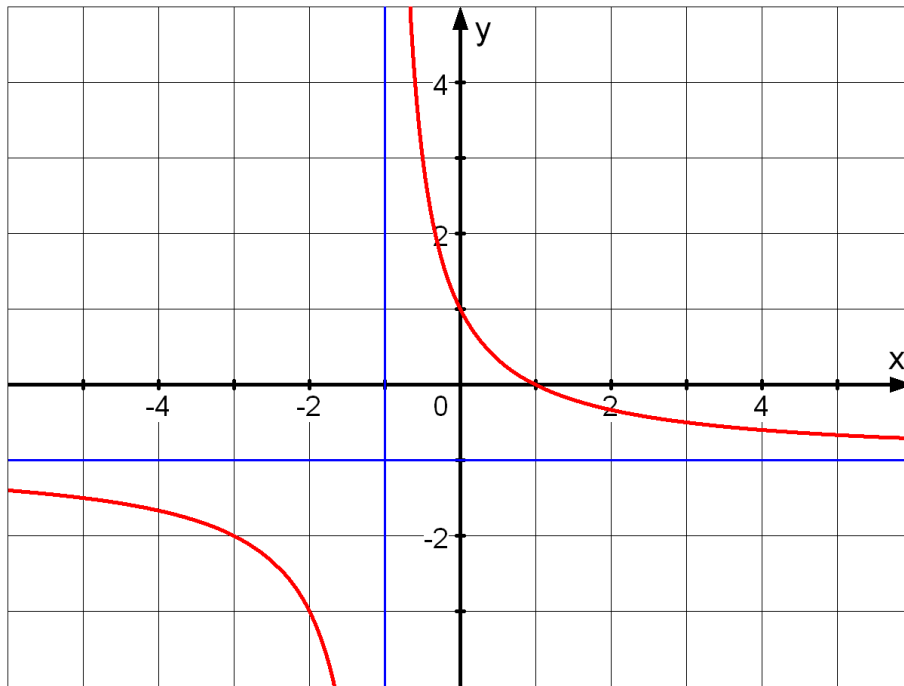
c) $S_x(1|0)$ und $S_y(0|1)$

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0 \text{ für } x \in D_f.$$

G_f ist für $x \in]-\infty; -1[$ und $x \in]-1; \infty[$ jeweils streng monoton fallend.

d)

| | | | |
|------|------|----|------|
| x | -5 | -2 | 5 |
| f(x) | -1,5 | -3 | -2/3 |



3. Auflösen der Funktionsgleichung nach y:

$$y = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow y \cdot (1+x) = 1-x \Leftrightarrow y + y \cdot x = 1-x \Leftrightarrow x + x \cdot y = 1-y$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (1+y) = 1-y \Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$$

Also ist f umkehrbar mit der Umkehrfunktion $f^{-1}: x \rightarrow \frac{1-x}{1+x} = f(x)$

Die Funktion f ist ihre eigene Umkehrfunktion. Ihr Graph ist also symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

4: a) $F'(x) = -1 + 2 \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{-1 \cdot (x+1) + 2}{x+1} = \frac{1-x}{1+x} = f(x)$

b) $\int_0^1 f(x) = \left[-x + 2 \cdot \ln(x+1) \right]_0^1 = -1 + 2 \cdot \ln 2$

$$\frac{-1 + 2 \cdot \ln 2}{\frac{1}{4}\pi} = \frac{-4 + 8 \cdot \ln 2}{\pi} \approx 0,49$$