

Gegeben ist für  $k \in \mathbb{R}^+$  die Schar von Funktionen

$$f_k : x \rightarrow 1 - \frac{2k}{e^x + k}$$

mit dem maximalen Definitionsbereich  $D_k$ . Der Graph von  $f_k$  wird mit  $G_k$  bezeichnet.

1. a) Geben Sie den Definitionsbereich  $D_k$  an. Bestimmen Sie das Verhalten von  $f_k$  für  $x \rightarrow -\infty$  und für  $x \rightarrow \infty$  und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von  $G_k$  an.

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $G_k$ .

c) Zeigen Sie, dass  $G_k$  die  $x$ -Achse nur im Punkt  $S_k(\ln k \mid 0)$  schneidet. Die Tangente an  $G_k$  im Punkt  $S_k$  wird mit  $t_k$  bezeichnet.

Begründen Sie, dass alle Tangenten  $t_k$  parallel zueinander sind.

d) Zeigen Sie, dass sich die Graphen  $G_1$  und  $G_8$  nicht schneiden.

e) Berechnen Sie  $f_1(-1)$ ,  $f_1(1)$ ,  $f_8(1)$  und  $f_8(3)$ .

Zeichnen Sie die Graphen  $G_1$  und  $G_8$ , deren Asymptoten sowie die Tangenten  $t_1$  und  $t_8$  unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

f) Begründen Sie, dass durch jeden Punkt der  $x$ -Achse ein Graph  $G_k$  verläuft.

g) Zeigen Sie, dass die Funktion  $F_k: x \rightarrow 2 \cdot \ln(e^x + k) - x$  mit  $x \in D_k$  eine Stammfunktion von  $f_k$  ist.

h)  $G_k$  und die Koordinatenachsen begrenzen im IV. Quadranten ein Flächenstück.

Berechnen Sie dessen Inhalt.

---

2. Lässt man für den Parameter  $k$  auch negative Werte zu, so unterscheiden sich die Graphen  $G_k$  mit  $k \in \mathbb{R}^-$  von den Graphen  $G_k$  mit  $k \in \mathbb{R}^+$ .

Geben Sie zwei grundsätzliche Unterschiede an und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

---

**Lösung**

1. a)  $D_k = \mathbb{R}$ , da  $e^x > 0$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{2k}{e^x + k} \right) = 1 - 2 = -1, \text{ da } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$G_k$  besitzt für  $x \rightarrow -\infty$  die waagrechte Asymptote  $y = -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2k}{e^x + k} \right) = 1, \text{ da } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \text{ und damit } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2k}{e^x + k} = 0.$$

$G_k$  besitzt für  $x \rightarrow \infty$  die waagrechte Asymptote  $y = 1$ .

$$\text{b) } f_k'(x) = -\frac{0 \cdot (e^x + 1) - 2k \cdot e^x}{(e^x + k)^2} = \frac{2k \cdot e^x}{(e^x + k)^2} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$G_k$  ist also auf ganz  $D_k = \mathbb{R}$  streng monoton steigend.

$$\text{c) } f_k(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2k}{e^x + 1} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2k}{e^x + k} \Leftrightarrow e^x + k = 2k \Leftrightarrow e^x = k \Leftrightarrow x = \ln k$$

und damit ist  $S_k(\ln k | 0)$  der einzige Schnittpunkt eines Schargraphen mit der x-Achse.

$$\text{Steigung der Tangente in } S_k: f_k'(\ln k) = \frac{2k \cdot e^{\ln k}}{(e^{\ln k} + k)^2} = \frac{2k \cdot k}{(k + k)^2} = \frac{2k^2}{4k^2} = \frac{1}{2}$$

Alle Tangenten haben die gleiche Steigung und sind daher parallel.

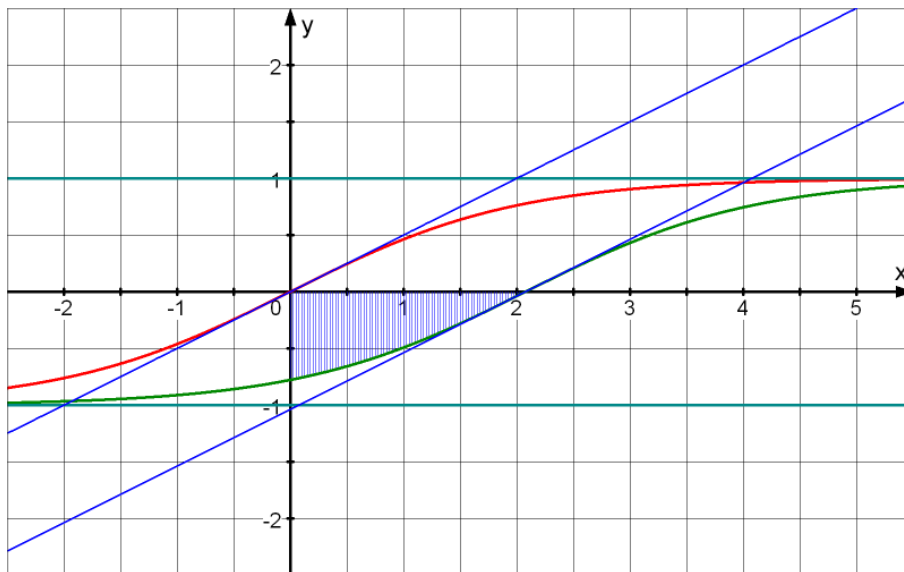
$$\text{f) } f_1(x) = f_8(x) \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{e^x + 1} = 1 - \frac{16}{e^x + 8} \Leftrightarrow \frac{2}{e^x + 1} = \frac{16}{e^x + 8}$$

$$\Leftrightarrow e^x + 8 = 8e^x + 8 \Leftrightarrow e^x = 0$$

Die letzte Gleichung besitzt keine Lösung. Also schneiden sich die beiden Graphen nicht.

$$\text{e) } f_1(-1) = 1 - \frac{2}{e^{-1} + 1} \approx -0,46 \text{ und } f_1(1) = 1 - \frac{2}{e + 1} \approx 0,46$$

$$f_8(1) = 1 - \frac{16}{e + 8} \approx -0,49 \text{ und } f_8(3) = 1 - \frac{16}{e^3 + 8} \approx 0,43$$



f) Die Schnittpunkte der Graphen  $G_k$  mit der  $x$ -Achse sind gegeben durch  $S_k(\ln k \mid 0)$ .

Da die  $\ln$ -Funktion die Wertemenge  $\mathbb{R}$  hat, ist jeder Punkt der  $x$ -Achse Schnittpunkt eines Schargraphen mit der  $x$ -Achse.

Ist der Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse gegeben durch  $S(x_0 \mid 0)$ , dann schneide der zu  $k = e^{x_0}$  gehören Schargraph die  $x$ -Achse in  $S$ .

$$\begin{aligned} \text{g) } F_k'(x) &= 2 \cdot \frac{e^x}{e^x + k} - 1 = \frac{2e^x - (e^x + k)}{e^x + k} = \frac{e^x - k}{e^x + k} = \frac{e^x + k - 2k}{e^x + k} = \frac{e^x + k}{e^x + k} - \frac{2k}{e^x + k} = \\ &= 1 - \frac{2k}{e^x + k} \end{aligned}$$

$$\text{h) } \int_0^{\ln 8} \left(x - \frac{16}{e^x + 8}\right) dx = \left[2 \cdot \ln(e^x + 8) - x\right]_0^{\ln 8} = \left(2 \cdot \ln 16 - \ln 8\right) - 2 \cdot \ln 9 = \ln \frac{32}{81}$$

$$\mathfrak{A} = \left| \ln \frac{32}{81} \right| = \ln \frac{81}{32} \approx 0,93$$

2. Für negative  $k$ -Werte besitzt jede Scharfunktion eine Definitionslücke, aber keine Nullstelle.

Begründung:

$f_k$  besitzt für  $k < 0$  die Definitionslücke  $x = \ln(-k)$

$$1 - \frac{2k}{e^x + k} = 0 \Rightarrow e^x = k \text{ besitzt für } k < 0 \text{ keine Lösung.}$$