Grundkurs 2009	Infinitesimalrechnung	Aufgabe II

Gegeben ist die Funktion $f: x \to x \cdot e^{2-x}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

   b) Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunkts von G_f und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $P(0|\, f(0))$.

   c) Untersuche Sie das Krümmungsverhalten von G_f. Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f an.

   d) Berechnen Sie f(0,5) und f(5). Zeichnen Sie die Tangente t und den Graphen G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ei,.

(Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende : $-7 \le y \le 9$)

---

2. a) Ermitteln Sie durch Betrachtung einer jeweils geeigneten Dreiecks oder Trapezfläche grobe Näherungswerte für $\int_0^1 f(x)dx$ und $\int_1^5 f(x)dx$.

   b) Betrachtet wird die Integralfunktion: $I: x \to \int_0^x f(t)dt$ für $x \in \mathbb{R}$:

   Bestimmen Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung der Funktion I Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von 1.

   Skizzieren Sie unter Einbeziehung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere auch der Näherungswerte aus Aufgabe 2.a) den Graphen von I in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe l.d).

---

3. Gegeben ist nun zusätzlich die Schar der Geraden g_a mit den Gleichungen $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, und Definitionsbereich $D_a = \mathbb{R}$.

   a) Jede Gerade g_a hat mit G_f den Ursprung gemeinsam (kein Nachweis erforderlich).

   Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte des Parameters a es einen zweiten Punkt gibt, die die Gerade g_a mit G_f gemeinsam hat.

   Geben Sie die x-Koordinate x_S dieses Punktes in Abhängigkeit von a an.

b) $F: x \to (-x-1) \cdot e^{2-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich).

Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die G_f mit der Geraden g_a m für $a = 1$ einschließt.

c) G_f und die x-Achse schließen im I. Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück ein, das den endlichen Flächeninhalt e^2 besitzt (Nachweis nicht erforderlich).

Für ein, bestimmtes a_0 teilt die Gerade g_{a_0} dieses Flächenstück in zwei inhaltsgleiche Teilstücke.

Geben Sie einen Ansatz zur Bestimmung von a_0 an.

Lösung

1. a) $x = 0$

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{2-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{x-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^2 \cdot x}{e^x} = 0 \text{ und } \lim_{x \to \infty} x \cdot e^{2-x} = -\infty$$

b) $f'(x) = 1 \cdot e^{2-x} + x \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (1-x) \cdot e^{2-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

$f''(x) = -1 \cdot e^{2-x} + (1-x) \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (x-2) \cdot e^{2-x}$

$f''(1) = (1-2) \cdot e^{2-1} = -e < 0$

Also ist E(1|e) ein Hochpunkt des Graphen.

$f'(0) = e^2$ und damit ist $y = e^2 \cdot x$ die Gleichung der Tangente im Punkt P.

c) $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Krümmungsverhalten von f

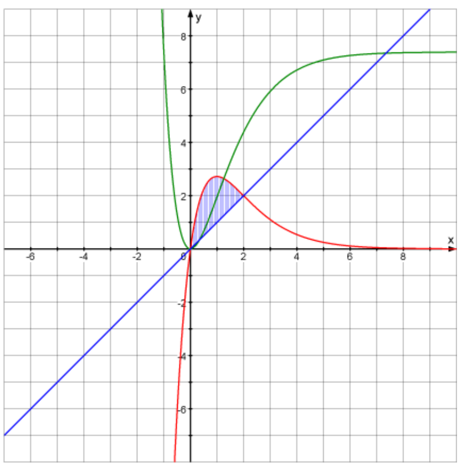
	$-\infty < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
	Rechtskrümmung	Rechtskrümmung

Mithin ist W(2| 2) der einzige Wendepunkt des Graphen von f.

d) Der Ursprung ist TP des Graphen von I.

Begründung : $f(0) = 0$ mit VZW von $-$ nach $+$ und $I(0) = 0$

$f(-0{,}5) = -0{,}5 \cdot e^{2{,}5} \approx -6{,}1$ und $f(5) = 5 \cdot e^{-3} \approx 0{,}25$



---

2. a) $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\cdot 1\cdot e = \frac{e}{2} \approx 1{,}4$ und $\int_1^5 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\cdot(e + \frac{5}{e^3})\cdot 4 \approx 5{,}9$

b) $I(0) = 0$ und $I(1) \approx 1{,}4$ und $I(5) = 7{,}3$

$H\left(0 \mid 0\right)$ ist Tiefpunkt von des Graphen von I.

Begründung: $x = 0$ ist Nullstelle von f und Vorzeichenverhalten von f.

---

3. Gegeben : $g_a : y = ax$

a) $ax = x\cdot e^{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot(a - e^{2-x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee e^{2-x} = a$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2 - \ln a$ falls $a > 0$.

Gleichheit der Lösungen: $2 - \ln a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = e^2$

Falls $a > 0$ und $a \neq e^2$, dann gibt es zwei Schnittpunkte.

Der zweite Schnittpunkt hat die x-Koordinate $2 - x = \ln a \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 - \ln a$

b) $\mathfrak{A} = \int_0^2 [f(x) - x]dx = \left[(-x-1)\cdot e^{2-x} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = (-3-2) - (-e^2) = e^2 - 5$

c) $\int_0^{2-\ln a} [f(x) - ax]dx = \frac{1}{2}e^2$
