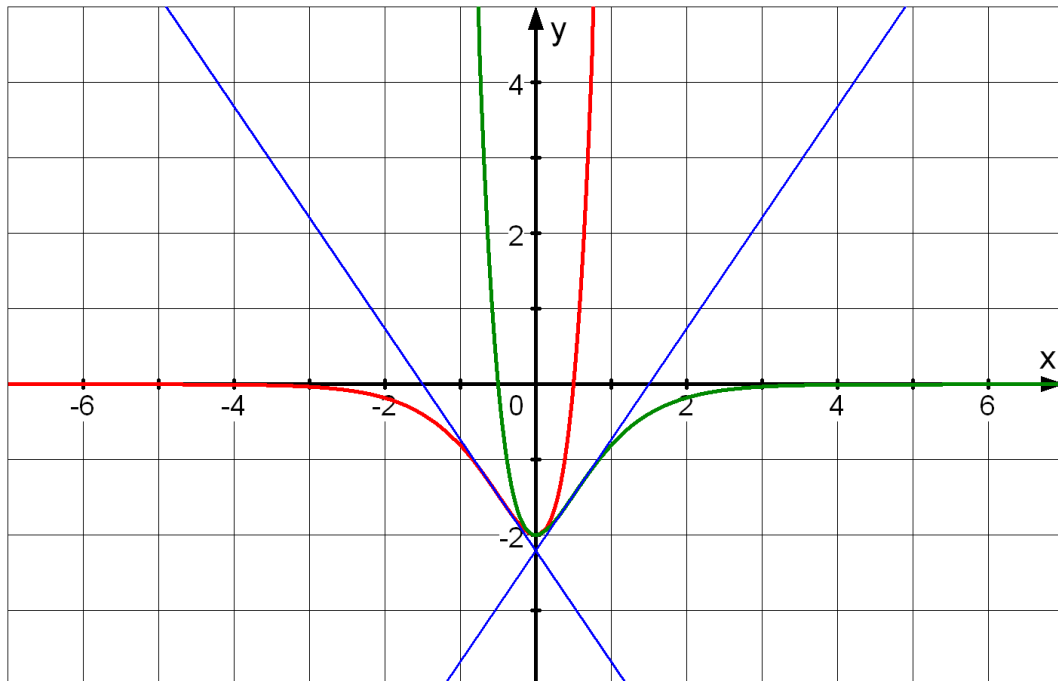


Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der Funktion $g : x \rightarrow (4x - 2) \cdot e^{2x}$ mit dem Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}$.



1. a) Berechnen Sie die Nullstelle von g .

G_g besitzt genau einen Tiefpunkt (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie dessen Koordinaten.

b) Weisen Sie nach, dass G_g genau einen Wendepunkt besitzt und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w . Tragen Sie diese in obige Abbildung ein.

c) Gegeben ist die Integralfunktion $I : x \rightarrow \int_0^x g(t) dt$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Für verschiedene Werte von x wird jeweils das Vorzeichen von $I(x)$ betrachtet.

Was kann hierüber ohne Rechnung im Bereich $0 < x \leq 0,5$ ausgesagt werden, was im Bereich $x > 0,5$?

Begründen Sie ihre Antwort, ohne eine integralfreie Darstellung von I zu verwenden.

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion

$$h : x \rightarrow (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$$

mit Definitionsbereich $D_h = \mathbb{R}$ und zugehörigem Graph G_h

2. a) Begründen Sie anhand der Funktionsterme von g und h , dass man G_h erhält, indem man G_g an der y -Achse spiegelt.

Geben Sie auch die Gleichung der Wendetangente von G_h an.

- b) Die Funktion $G : x \rightarrow (2x - 2) \cdot e^{2x}$ mit $D_G = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich).

Die Schnittpunkte der Graphen G_g bzw. G_h mit der x -Achse werden mit N bzw. M bezeichnet.

Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das von der Strecke $[MN]$ sowie den Graphen G_g und G_h eingeschlossen wird.

(Hinweis : G_g und G_h schneiden sich nur auf der y -Achse.)

-
3. Betrachtet wird nun die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen

$$f_a : x \rightarrow (2ax - 2) \cdot e^{ax} \text{ mit } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Funktionen g und h Funktionen der Schar sind, indem Sie die zugehörigen Parameterwerte a angeben.

Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar die y -Achse im selben Punkt schneiden.

- b) Jede Funktion der Schar hat genau eine Wendestelle und zwar bei $x = -\frac{1}{a}$ (Nachweis nicht erforderlich).

Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen p zur x -Achse liegen, und geben Sie die Gleichung von p an.

- c) Die Wendetangente jedes Graphen der Schar schließt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck ein. Für bestimmte Werte von a ist dieses Dreieck gleichschenkelig.

Beschreiben Sie einen Weg, um diese Werte von a rechnerisch zu ermitteln (Rechnungen sind nicht erforderlich).

Lösung

$$1. a) g(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = 4 \cdot e^{2x} + (4x - 2) \cdot e^{2x} \cdot 2 = 8x \cdot e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g(0) = (4 \cdot 0 - 2) \cdot e^{2 \cdot 0} = -2 \cdot 1 = -2$$

Die Koordinaten des Tiefpunkts sind also $T(0 | -2)$.

$$b) g''(x) = 8 \cdot e^{2x} + 8x \cdot e^{2x} \cdot 2 = (8 + 16x) \cdot e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Krümmungsverhalten :

	$-\infty < x < -0,5$	$-0,5 < x < \infty$
$8 + 16x$	-	+
e^{2x}	+	+
$g''(x)$	-	+
	RK	LK

$W\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{e}\right)$ ist also der einzige Wendepunkt des Graphen von f .

$$g'(-0,5) = -4 \cdot e^{-1} = -\frac{4}{e}$$

$$\text{Wendetangente } w : y = -\frac{4}{e} \cdot (x + 0,5) - \frac{4}{e} = -\frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$$

$$c) I : x \rightarrow \int_0^x g(t) dt$$

I ist für $0 < x \leq 0,5$ negativ,

da die Integration nach rechts verläuft und der Integrand für $0 < x < 0,5$ negativ ist.

Für $x > 0,5$ kommt es für ein $x_0 > 0,5$ zum Flächenausgleich und I wird positiv um es dann auch zu bleiben.

$$2. a) g(-x) = [4 \cdot (-x) - 2] \cdot e^{2 \cdot (-x)} = (-4x - 2) \cdot e^{-2x} = h(x)$$

Also liegen der Graph von h und der Graph von g achsensymmetrisch zur y -Achse.

$$w' : y = \frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$$

Ist $f: x \rightarrow f(x)$ eine Funktion mit dem Graphen G_f , dann erhält man den Graphen von

1. $f_1: x \rightarrow -f(x)$ durch Spiegelung von G_f an der x -Achse.
2. $f_2: x \rightarrow f(-x)$ durch Spiegelung von G_f an der y -Achse.
3. $f_3: x \rightarrow -f(-x)$ durch Spiegelung von G_f am Koordinatenursprung $O(0|0)$.
4. $f_4: x \rightarrow f(x-a)+b$ durch Verschiebung von G_f mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
5. $f_5: x \rightarrow f(ax)$ durch eine orthogonale Affinität von G_f entlang der x -Achse.
6. $f_6: x \rightarrow a \cdot f(x)$ durch eine orthogonale Affinität von G_f entlang der y -Achse.

$$\text{b) } \int_0^{0,5} g(x) dx = \left[(2x-2) \cdot e^{2x} \right]_0^{0,5} = (1-2) \cdot e - (0-2) \cdot 1 = 2-e$$

$$\mathfrak{A} = 2 \cdot (e-2) = 2e-4$$

3. $f_a(x) = (2ax-2) \cdot e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

a) $g(x) = f_2(x)$ und $h(x) = f_{-2}(x)$

$$f_a(0) = (0-2) \cdot e^0 = -2$$

$$\text{b) } f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = \left[2a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) - 2 \right] \cdot e^{a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = -\frac{4}{e} \text{ ergibt } p : y = -\frac{4}{e}$$

c) Der Betrag der Nullstelle der Wendetangente muss gleich dem Betrag des y -Abschnitts der Wendetangente sein.