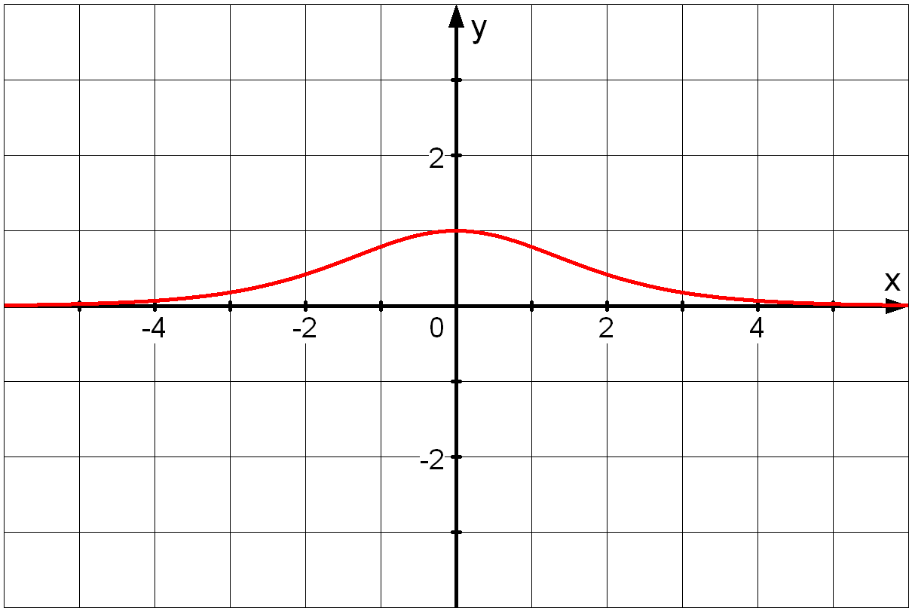
Grundkurs 2007	Infinitesimalrechnung	Aufgabe I

1. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion $f\colon x \to \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.



a) Begründen Sie, dass G_f stets oberhalb der x-Achse verläuft und berechnen Sie den Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse. Weisen Sie nach, dass für $x \to \pm\infty$ die Gerade $y = 0$ Asymptote von G_f ist.

b) Erklären Sie, wie man mit Hilfe des Graphen G_f ohne Berechnung von f' näherungsweise Werte von f' an einzelnen Stellen ermitteln kann.

Bestimmen Sie auf die von Ihnen beschriebene Weise einen Näherungswert für $f'(1)$ auf eine Dezimale gerundet.

c) Die Funktion F mit $D_F = \mathbb{R}$ hat die Form $F(x) = \dfrac{c}{e^x+1}$ und ist eine Stammfunktion von f.

Bestimmen Sie die Konstante c.

d) Bestimmen Sie F(0) und sowie das Verhalten von F an den Rändern von D_F.

Begründen Sie, dass F streng monoton zunehmend in D_F ist.

e) Tragen Sie die Tangente an den Graphen von F im Punkt $P\left(0 \mid F(u)\right)$ in untenstehendes Koordinatensystem ein und skizzieren Sie anschließend den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in diese Abbildung.

f) Der Graph G_f, die x-Achse sowie die Geraden $x = -u$ und $x = u$, $u > 0$, schließen ein Flächenstück vom Inhalt $A(u)$ ein.

Bestimmen Sie $\lim\limits_{u \to \infty} A(u)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

---

2. Folgende Tabelle gibt für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1991 bis 1999 die Anzahl der Mobilfunkverträge in Deutschland jeweils zum Jahresende an.

Jahr	1991	1993	1995	1997	1999
Anzahl in Mio.	0,5	1,8	3,8	8,3	23,4

Die steigende Anzahl der Mobilfunkverträge lässt sich in diesem Zeitraum näherungsweise als exponentielles Wachstum auffassen und durch eine Exponentialfunktion der Form

$N(x) = a \cdot e^{bx}$

beschreiben. $N(x)$ ist dabei die Zahl der Mobilfunkverträge in Millionen, x ist die seit Jahresende 1991 vergangene Zeit in Jahren.

Beispielsweise ist $x = 8$ für das Ende des Jahres 1999.

a) Bestimmen Sie a und b aus den Werten für die Jahre 1991 und 1999.

Runden Sie b auf zwei Dezimalen.

b) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Funktionswertes $N(x)$ für das Jahresende 1995 vom tatsächlichen Wert.

Welcher Funktionswert ergibt sich für das Jahresende 2007?

Bewerten Sie das Ergebnis im oben genannten Anwendungszusammenhang.

c) Bei einem exponentiellen Wachstum dauert es immer gleich lang, bis sich die Funktionswerte verdoppeln.

Berechnen Sie diese Verdopplungszeit im vorliegenden Fall.

Lösung

1. a) $e^x > 0$ und $(e^x+1)^2 > 0$ ergibt $f(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

$f(0) = \dfrac{4 \cdot e^0}{(e^0+1)^2} = \dfrac{4}{(1+1)^2} = 1$ und damit ergibt sich $S_y\left(0 \mid 1\right)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4e^x}{e^{2x}+2e^x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{e^x+2+\frac{1}{e^x}} = 0$$

b) Man zeichnet näherungsweise Tangenten ein und bestimmt deren Steigung.

Es ergibt sich $f\,'(1) \approx -0{,}4$

c) $F'(x) = \dfrac{0 \cdot (e^x+1) - c \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{-c \cdot e^x}{(e^x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad c = -4$

d) $F(0) = \dfrac{-4}{e^0+1} = \dfrac{-4}{1+1} = -2$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{e^x+1} = -4 \text{ da } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{-4}{e^x+1} = 0-0 \text{ da } \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

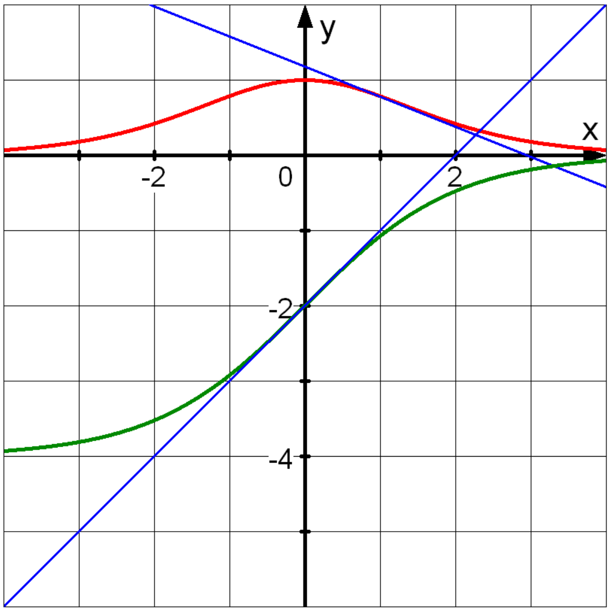
Aus $F'(x) = f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass F in D_F streng monoton zunehmend ist.

e) $F'(0) = f(0) = 1$

f) $A(u) = \displaystyle\int_{-u}^{u} f(x)dx = \left[\frac{-4}{e^x+1}\right]_{-u}^{u} = \frac{-4}{e^u+1} - \frac{-4}{e^{-u}+1}$

und damit ist $\lim\limits_{u \to \infty} A(u) = 4$

Die nach beiden Seiten hin unendlich ausgedehnte Fläche zwischen G_f und der x-Achse hat den Inhalt 4.



----

2. a) $0{,}5 \;=\; a\cdot e^{0} \quad\Rightarrow\quad a \;=\; 0{,}5$ und $23{,}4 \;=\; 0{,}5\cdot e^{b\cdot 8} \quad\Rightarrow\quad b \;=\; \frac{1}{8}\cdot \ln 46{,}8 \approx 0{,}48$

b) $N(4) \;=\; 0{,}5\cdot e^{0.48\cdot 4} \approx 3{,}41$

Prozentuale Abweichung: $\dfrac{3{,}8-3{,}41}{3{,}8} \approx 0{,}103 \;=\; 10{,}3\%$

$N(16) \;=\; 0{,}5\cdot e^{0.48\cdot 16} \approx 1082$

Es ergibt sich ein sehr unrealistischer Wert!

$1 \;=\; 0{,}5\cdot e^{0{,}48\cdot x_2} \quad\Rightarrow\quad x_2 \;=\; \dfrac{\ln 2}{0{,}48} \approx 1{,}44$