Grundkurs 2006	Infinitesimalrechnung	Aufgabe II

Gegeben ist die Schar von Funktionen

$$f_a\colon x \to \frac{ax^2 - 5}{x^2}$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsbereich $D_a = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten von G_a und die zwei Nullstellen von f_a.

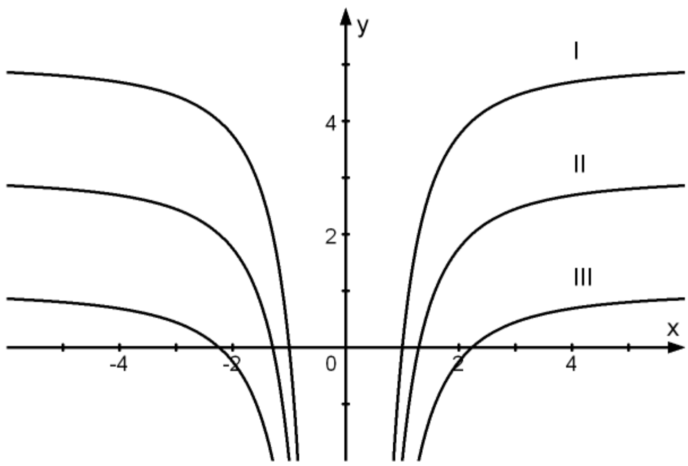
   b) Begründen Sie, dass $y = a$ Asymptote von G_a ist.

   Untersuchen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an der Definitionslücke.

   c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_a.

   d) Die Abbildung zeigt drei Graphen der Schar zu ganzzahligen Parameterwerten a.

   Geben Sie an, zu welchem a die Graphen I, II und III jeweils gehören, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



---

2. a) Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte a die positive Nullstelle von f_a kleiner als 2,5 ist.

   Für diese Parameterwerte a schließen der Graph G_a, die Koordinatenachsen, die Asymptote $y = a$ und die Gerade $x = 2{,}5$ im ersten Quadranten eine Fläche mit Inhalt A_a ein.

   b) Markieren Sie diese Fläche für einen der Graphen in der Abbildung von Aufgabe 1.d).
   Begründen Sie, dass für den Flächeninhalt A_a gilt:

$$A_a = 2{,}5a - \int_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2{,}5} f_a(x)dx$$

c) Zeigen Sie: $A_a = 2\sqrt{5a} - 2$

Hinweis:

Für die Integration ist es hilfreich, den Term der Funktion f_a als Differenz darzustellen.

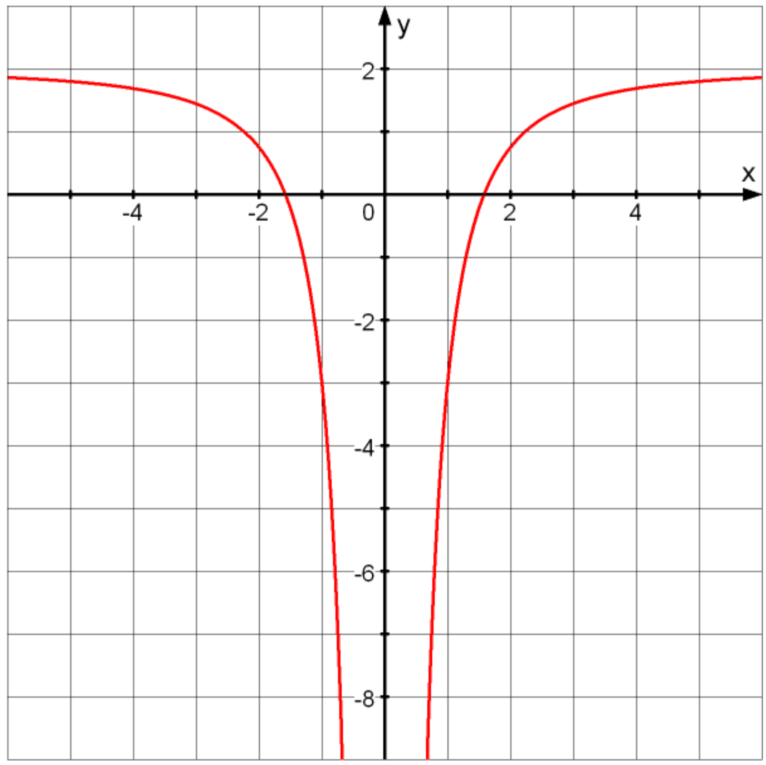
d) Geben Sie ein Beispiel für zwei Parameterwerte a_1 und a_2 an, so dass sich die Flächeninhalte A_{a_1} und A_2 um $2\sqrt{5}$unterscheiden.

---

3. Nun sei $a = 2$. Die untenstehende Abbildung zeigt den zugehörigen Graphen.

Die Tangenten an in den Kurvenpunkten $P\left(1{,}25 \mid -1{,}2\right)$ und $Q\left(-1{,}25 \mid -1{,}2\right)$ schließen mit der Asymptote ein Dreieck ein.

Skizzieren Sie das Dreieck in die untenstehende Abbildung und berechnen Sie seinen exakten Flächeninhalt.



Lösung

1. a) $f_a(-x) = \frac{a \cdot (-x)^2 - 5}{(-x)^2} = \frac{a \cdot x^2 - 5}{x^2} = f_a(x)$

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a \cdot x^2 - 5}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x^2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{5}{a}$

$\Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{5}{a}} \vee x = \sqrt{\frac{5}{a}}$ sind die Nullstellen einer Scharfunktion von f_a.

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a \cdot x^2 - 5}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(a - \frac{5}{x^2} \right) = a$

$y = a$ ist damit waagrechte Asymptote eines Schargraphen G_a.

$\lim\limits_{x \to 0\pm0} \frac{a \cdot x^2 - 5}{x^2} = -\infty$, denn $\lim\limits_{x \to \pm0} (a \cdot x^2 - 5) = -5$ und $\lim\limits_{x \to \pm0} x^2 = 0 + 0$

c) $f_a(x) = a - \frac{5}{x^2} = a - 5 \cdot x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f_a'(x) = -5 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{10}{x^3}$

	$x < 0$	$x > 0$
$f_a'(x)$	$-$	$+$

f_a nimmt in $]-\infty; 0[$ streng monoton ab und in $]0; \infty[$ streng monoton zu.

d)

Nr.	I	II	III
	5	3	1

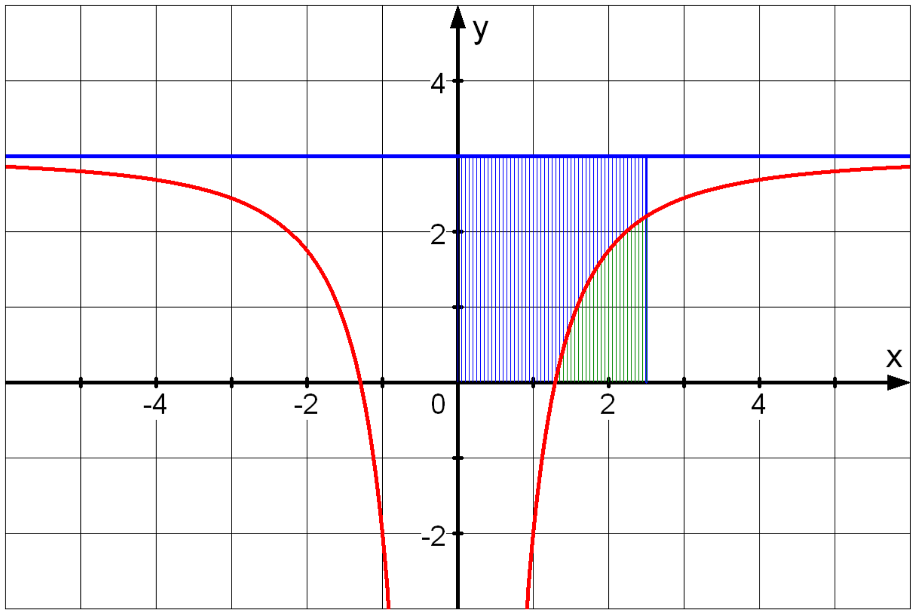
Begründung: Nullstellen und asymptotisches Verhalten

---

2. a) $\sqrt{\frac{5}{a}} < 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{a} < \frac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad 4 < 5a \quad \Rightarrow \quad a > 0{,}8$

Scharfunktionen mit $a > 0,8$ haben eine positive Nullstelle, die kleiner als 2,5 ist.

b)



Fläche des Rechtecks: $A_R = 2{,}5 \cdot a$

Damit ergibt sich $A_a = 2{,}5a - \int\limits_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2{,}5} f_a dx$

$$\int\limits_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2{,}5} \left(a - \frac{5}{x^2}\right) dx = \left[ax + \frac{5}{x}\right]_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2{,}5} = \left(2{,}5a + 2\right) - \left(\sqrt{5a} + \sqrt{5a}\right) = 2{,}5a + 2 - 2\sqrt{5a}$$

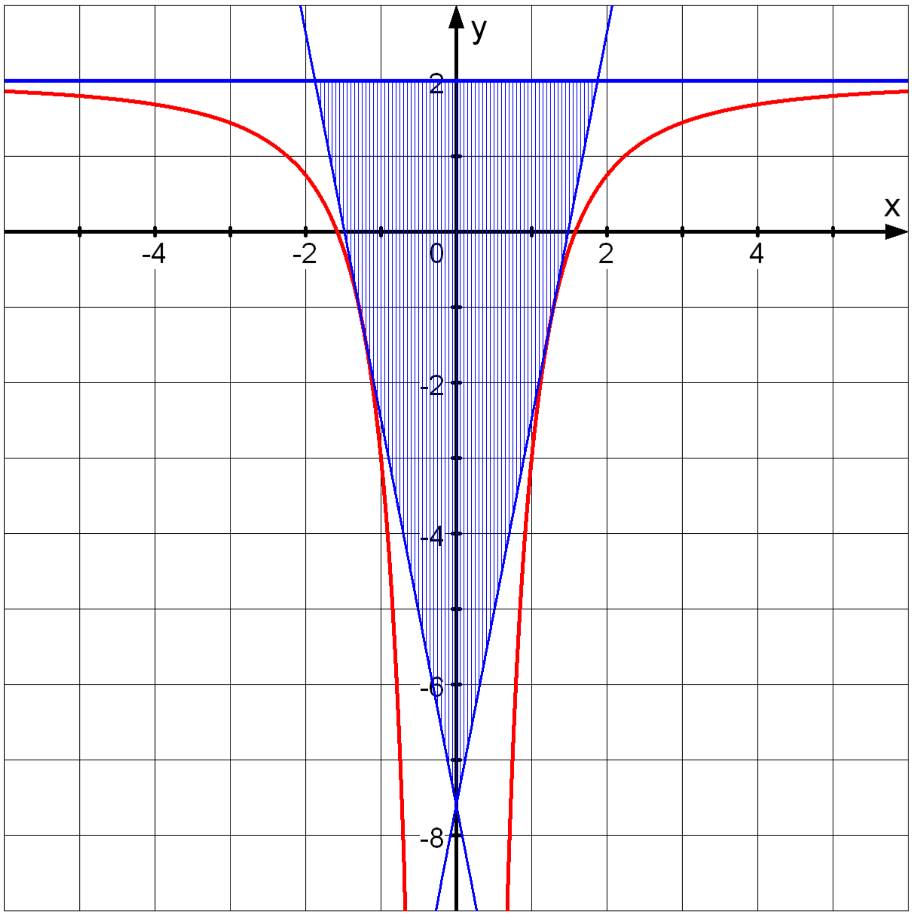
und damit $A_a = 2{,}5a - \left(2{,}5a + 2 - 2\sqrt{5a}\right) = 2\sqrt{5a} - 2$

d) $A_{a_1} - A_{a_2} = \left(2\sqrt{5a_1} - 2\right) - \left(2\sqrt{5a_2} - 2\right) = 2\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} = 1$

$a_2 = 1$ und $a_1 = 4$

---

3. a)



Tangentengleichung in Q:

$$f_2'(1{,}25) = \frac{10}{1{,}25^3} = 5{,}12$$

$$x = 5{,}12 \cdot (x - 1{,}25) - 1{,}2 = 5{,}12x - 7{,}6$$

Schnitt mit der Geraden $y = 2$:

$$5{,}12x - 7{,}6 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}875$$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A_D = 1{,}875 \cdot 9{,}6 = 18$