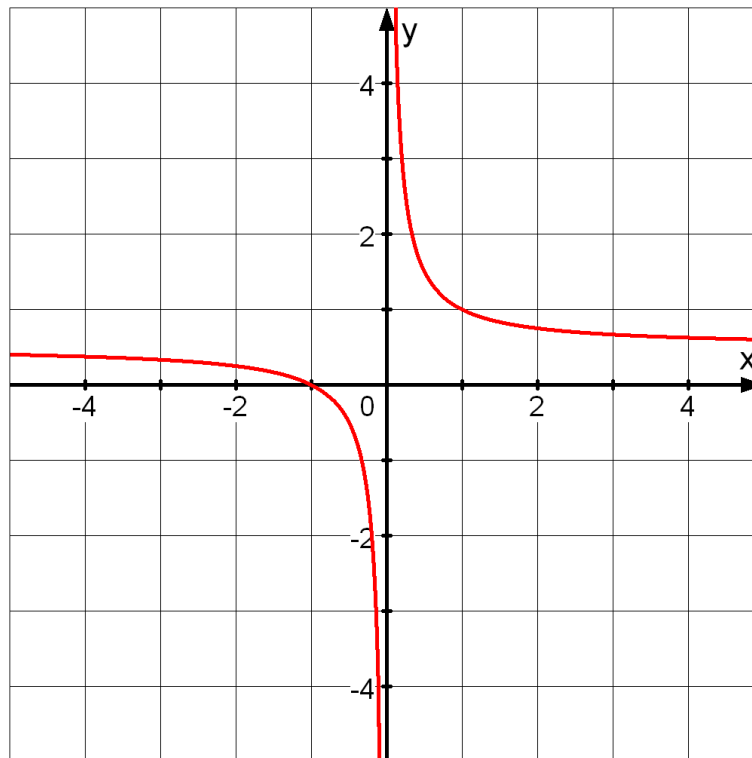


Die untenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f einer rationalen Funktion f der Form

$$f: x \rightarrow \frac{x+a}{bx}$$

mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



- a) Einziger Schnittpunkt von G_f mit der x -Achse ist $A(-1 | 0)$, außerdem verläuft G_f durch den Punkt $B(1 | 1)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm von f .

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion

$$g: x \rightarrow \ln f(x) = \ln \frac{x+1}{2x}$$

mit maximalem Definitionsbereich D_g . Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

- b) Begründen Sie anhand des Verlaufs von G_f , dass gilt: $D_g = \mathbb{R} \setminus [-1; 0]$.

Untersuchen Sie das Verhalten von g an den Rändern von D_g . Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an.

c) Ermitteln Sie die Nullstelle von g und untersuchen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung das Monotonieverhalten von g .

d) Bestimmen Sie die Stelle x_0 , an der die Funktionen f und g in der ersten Ableitung übereinstimmen.

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f in $P(x_0 | f(x_0))$ sowie die Gleichung der Tangente an G_g in $Q(x_0 | f(x_0))$.

Berechnen Sie die Nullstelle der Tangente in P .

e) Berechnen Sie $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0,1)$ und $g(4)$.

Zeichnen Sie den Graphen G_g sowie seine Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in die nebenstehende Abbildung ein.

Tragen Sie auch die Tangenten in P und Q ein.

f) Die Funktion

$$G: x \rightarrow x \cdot g(x) + \ln(x + 1)$$

ist für $x > 0$ eine Stammfunktion von g . Ein Nachweis ist nicht erforderlich.

Die Tangenten in P und Q schließen mit den Geraden $x = 1$ und $x = 3$ ein Parallelogramm ein. Der Graph von g teilt dieses Parallelogramm in zwei Teilflächen.

Wie viel Prozent der Parallelogrammfläche nimmt die Teilfläche unterhalb von G_g ein?

Lösung

a) $A(-1 | 0)$ eingesetzt ergibt $\frac{-1+a}{b \cdot (-1)} = 0 \Rightarrow -1+a = 0 \Rightarrow a = 1$

$B(1 | 1)$ eingesetzt ergibt: $\frac{1+1}{b} = 1 \Rightarrow b = 2$

Also $f(x) = \frac{x+1}{2x}$.

b) g ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) > 0$ definiert. Also ist $D_g = \mathbb{R} \setminus [-1; 0]$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \ln \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x+1}{2x} = 0+0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1-0} g(x) = -\infty \text{ da } \lim_{x \rightarrow 0+0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x+1}{2x} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+0} g(x) = \infty \text{ da } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

Waagrechte Asymptote: $y = \ln \frac{1}{2}$

Senkrechte Asymptoten: $x = -1$ und $x = 0$

c) $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{2x} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 2x \Leftrightarrow x = 1$

$x = 1$ ist die einzige Nullstelle von g .

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{2x}} \cdot \frac{1 \cdot 2x - (x+1) \cdot 2}{4x^2} = \frac{-1}{x \cdot (x+1)}$$

	$x < -1$	$x > 0$
x	-	+
$x+1$	-	+
$f'(x)$	-	-

f ist also für $x \in]-\infty; -1[$ und $x \in]0; \infty[$ jeweils streng monoton fallend.

d) $f(x) = \frac{x+1}{2x} = \frac{x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2x^2} = \frac{-1}{x \cdot (x+1)} \Rightarrow x \cdot (x+1) = 2x^2 \Rightarrow x = 1$$

$$f'(1) = g'(1) = -\frac{1}{2}$$

Berührungspunkte sind $P(1 | 1)$ und $Q(1 | 0)$.

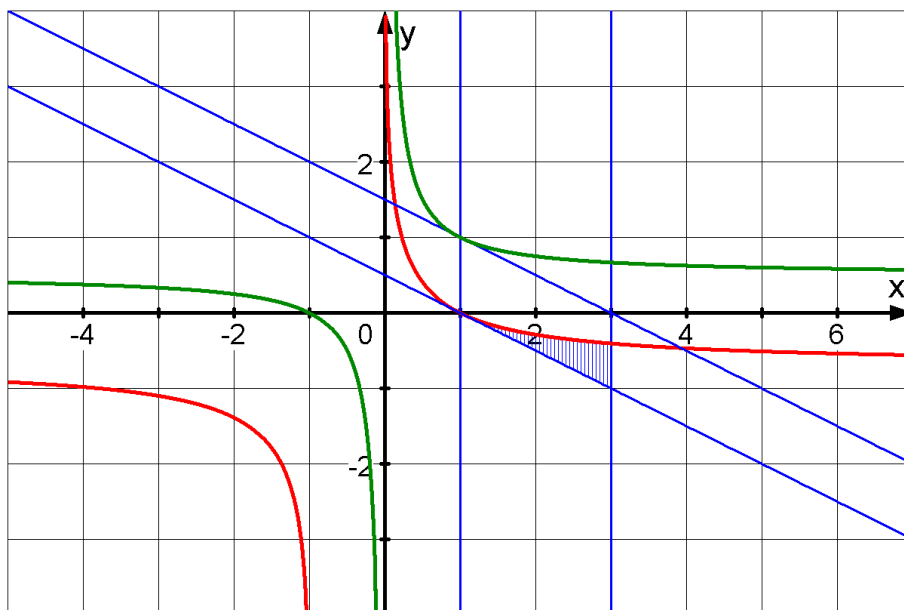
$$\text{Tangente an } G_f \text{ in } P: y = -\frac{1}{2} \cdot (x-1) + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\text{Tangente an } G_g \text{ in } Q: y = \frac{1}{2} \cdot (x-1) + 0 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Nullstelle der Tangente in } P: -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

e)

x	-4	-2	0,1	3
g(x)	-0,98	-1,39	1,70	-0,41



f) Fläche des Parallelogramms: $\mathfrak{A}_P = 2$

$$\int_1^3 \left[-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - g(x) \right] dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - x \cdot g(x) - \ln(x+1) \right]_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 3 \cdot g(3) - \ln(3+1) \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 \cdot g(1) - \ln(1+1) \right) =$$

$$= -\frac{3}{4} - 3 \cdot \ln \frac{2}{3} - \ln 4 - \frac{1}{4} + \ln 2 = -1 - \ln \frac{8}{27} - \ln 4 + \ln 2 = \ln \frac{27}{16} - 1$$

$$= 1 - 3 \cdot \ln \frac{2}{3} - \ln 4 - \ln 2 = \ln \frac{8}{27} + \ln 2 = \ln \frac{16}{27}$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}_p} = \frac{\ln \frac{27}{16} - 1}{2} \approx 26,2\%$$
