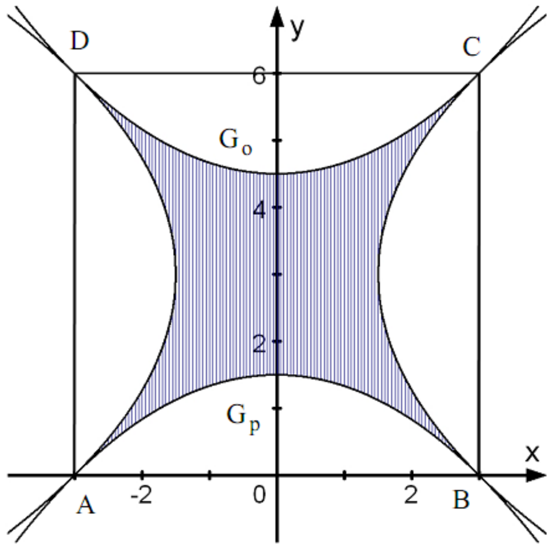
Grundkurs 2005	Infinitesimalrechnung	Aufgabe II

1. Im Eingangsbereich eines Unternehmens soll das Firmenlogo im Boden eingelassen werden. Die Abbildung zeigt den Entwurf des Architekten nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems:



Im Quadrat ABCD schneiden vier kongruente parabelförmige Bögen die in der Abbildung schraffierte Figur aus. Die untere Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$.

G_p schneidet die x-Achse in den Punkten $A\left(-3|\,0\right)$ und $B\left(0|\,3\right)$. Die Diagonalen des Quadrats sind zugleich Tangenten an die Parabeln in den Punkten A und C bzw. B und D.

a) Geben Sie die Werte der Ableitung von p in den beiden Nullstellen an und bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion p.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figur, wenn die Seitenlänge des Quadrats ABCD in der Eingangshalle 6 m beträgt.

---

2. Die Graphen der linken, rechten und oberen Parabel in der Abbildung oben gehen aus G_p durch Spiegelung und Verschiebung hervor.

Daher können die zugehörigen Funktionsterme aus dem Funktionsterm von p entwickelt werden.

a) Erklären Sie zunächst allgemein, wie die Graphen zu den Zuordnungsvorschriften

$x \rightarrow p(x) + a$ bzw. $x \rightarrow p(x+b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch Verschiebung aus G_p entstehen.

b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass zum Graphen der oberen Parabel in der Abbildung oben die Zuordnungsvorschrift $x \rightarrow -p(x) + 6$ gehört.

c) p ist in $[0; \infty[$ umkehrbar.

Ergänzen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion

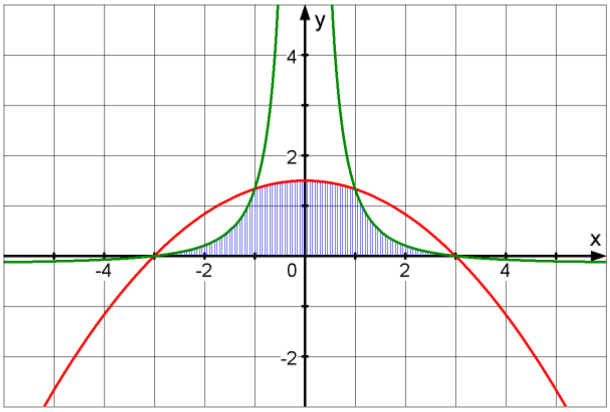
Kennzeichnen Sie obiger Abbildung Teil der Umrandung der schraffierten Figur, zu dem die Zuordnungsvorschrift $x \to p^{-1}(x+3)+3$ gehört.

---

3. Betrachtet wird nun die Funktion

$$f : x \to f(x) = \frac{p(x)}{x^2} = -\frac{1}{6} + \frac{1{,}5}{x^2}$$

mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und p aus der Aufgabe 1.



Der Graph G_f der Funktion f ist zusammen mit G_p ist in der Abbildung dargestellt.

Gemäß der Definition von f stimmen die Nullstellen von f mit den Nullstellen von p überein.

a) Weisen Sie nach, dass G_f achsensymmetrisch ist und untersuchen Sie das Verhalten von G_f für $x \to \infty$.

b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an G_f in den beiden Nullstellen.

c) Bestätigen Sie, dass $S\left(1 \middle| \frac{4}{3}\right)$ ein weiterer Schnittpunkt von G_f und G_p ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des schraffierten Flächenstücks, das von G_f, G_p und und der x-Achse begrenzt wird.

Lösung

1. a) $p'(-3) = -1$ und $p'(3) = 1$

Ansatz: $p(x) = a\cdot(x-3)\cdot(x+3) = a\cdot(x^2-9) \quad \Rightarrow \quad p'(x) = 2a\cdot x$

Bedingung: $p'(-3) = 1$ ergibt $2a\cdot(-3) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{6}$

$p(x) = -\frac{1}{6}\cdot(x^2-9) = -\frac{1}{6}x^2+1{,}5$

b) $\int_0^3 p(x)dx = \left[-\frac{1}{18}x^3+\frac{3}{2}x\right]_0^3 = -\frac{3}{2}+3 = \frac{3}{2}$ und damit $\mathfrak{A} = 6^2-8\cdot\frac{3}{2} = 24 \ (m^2)$

---

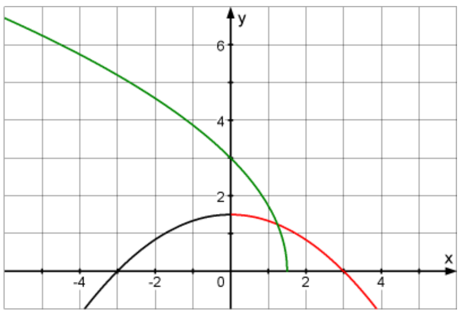
2. a) Die Graphen gehen aus G_p durch Verschiebung mit dem Vektor

$\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v} = \begin{pmatrix}-b\\0\end{pmatrix}$ hervor.

b) Den Graphen der Funktion $x \to -p(x)+6$ erhält durch Spiegelung von G_p an der x-Achse und anschließender Verschiebung um 6 Einheiten nach oben.

Man erhält so eine zu G_p kongruente Parabel mit dem Scheitel $S(0 \mid 4{,}5)$.

c)



Der Graph der Funktion $x \to p^{-1}(x+3)+3$ ist die obere Hälfte der nach links geöffneten Parabel.

---

3. a) $f(-x) = -\frac{1}{6}+\frac{1{,}5}{(-x)^2} = -\frac{1}{6}+\frac{1{,}5}{x^2} = f(x)$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1{,}5}{x^2}\right) = -\frac{1}{6}$ da $\lim_{x\to\infty}\frac{1{,}5}{x^2} = 0$

b) $f'(x) = -\frac{3}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f'(-3) = \frac{1}{9} \quad f'(3) = -\frac{1}{9}$ und

Tangentengleichungen:

$$y = \frac{1}{9}\cdot(x+3) = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3} \text{ und } y = -\frac{1}{9}\cdot(x-3) = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$$

c) $f(1) = -\frac{1}{6} + 1{,}5 = \frac{4}{3}$ und $p(1) = -\frac{1}{6} + 1{,}5 = \frac{4}{3}$

$$\int_0^1 p(x)dx = \left[-\frac{1}{18}x^3 + 1{,}5x\right]_0^1 = \frac{13}{9}$$

und

$$\int_1^3 f(x)dx = \left[-\frac{1}{6}x - \frac{1{,}5}{x}\right]_1^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\mathfrak{A} = 2\cdot\left(\frac{13}{9} + \frac{2}{3}\right) = \frac{38}{9}$$
