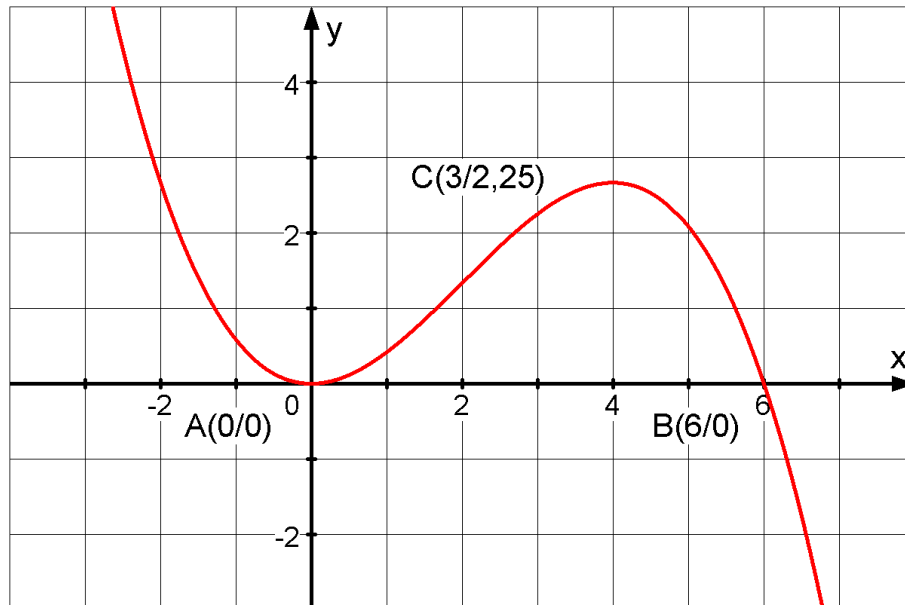


Die untenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.



- a) Bestimmen Sie mit Hilfe der in der Abbildung angegebenen Punkte von die Funktionsgleichung von f .
- b) Berechnen Sie die Lage des Hochpunktes H sowie des Wendepunktes W von G_f .

Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Wendetangente von G_f mit der x -Achse.

- c) Bestimmen Sie $\int_0^2 f(x) dx$.

Der Koordinatenursprung und die Punkte S und W bilden ein Dreieck, das durch G_f geteilt wird.

Zeichnen Sie dieses Dreieck in die Abbildung ein und berechnen Sie, in welchem Verhältnis der Graph G_f die Dreiecksfläche teilt.

Betrachtet wird nun die Funktion $F: x \rightarrow \int_2^x f(t) dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

- d) Geben Sie ohne Rechnung $F(0)$ und $F(2)$ an (kurze Begründung).

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vorzeichenbetrachtung zu f das Monotonieverhalten von F . Welche Besonderheit des Graphen von F liegt an der Stelle $x = 0$ vor?

e) Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von F in das gegebene Koordinatensystem in der Abbildung.

Die Berechnung weiterer Funktionswerte ist nicht verlangt.

Schließlich wird noch die Funktion $g: x \rightarrow \frac{1}{f(x)}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g untersucht.

Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

f) Geben Sie D_g an und untersuchen Sie das Verhalten von g an den Rändern des Definitionsbereichs.

g) Untersuchen Sie G_g auf Extrempunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Art und Lage an.

Lösung

a) Ansatz: $f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x-6)$

$$C(3 | 2,25) \text{ eingesetzt: } 2,25 = a \cdot 3^2 \cdot (3-6) \Rightarrow a = -\frac{1}{12}$$

$$\text{Damit } f(x) = -\frac{1}{12}x^2 \cdot (x-6) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

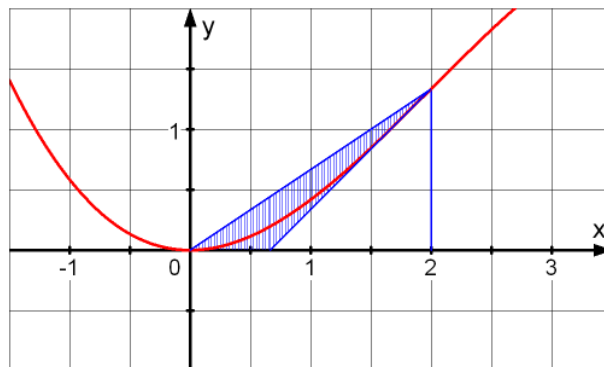
b) $f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 4$ und damit ist $H\left(4 \mid \frac{8}{3}\right)$ der Hochpunkt.

$f''(x) = -\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ und damit ist $W\left(2 \mid \frac{4}{3}\right)$ der Wendepunkt.

Gleichung der Wendetangente: $y = f'(2) \cdot (x-2) + \frac{4}{3} = x - \frac{2}{3}$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

c) $\int_0^2 f(x) dx = \left[-\frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 = 1$



Fläche des Dreiecks: $\mathfrak{A}_{ASW} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$

Fläche des unteren Teils: $\mathfrak{A}_1 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{9}$

Das Dreieck ASW wird durch den Graphen von f im Verhältnis $\frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}} = 1 : 3$ geteilt.

$$d) F(0) = \int_2^0 f(t) dt = - \int_0^2 f(t) dt = -1$$

und

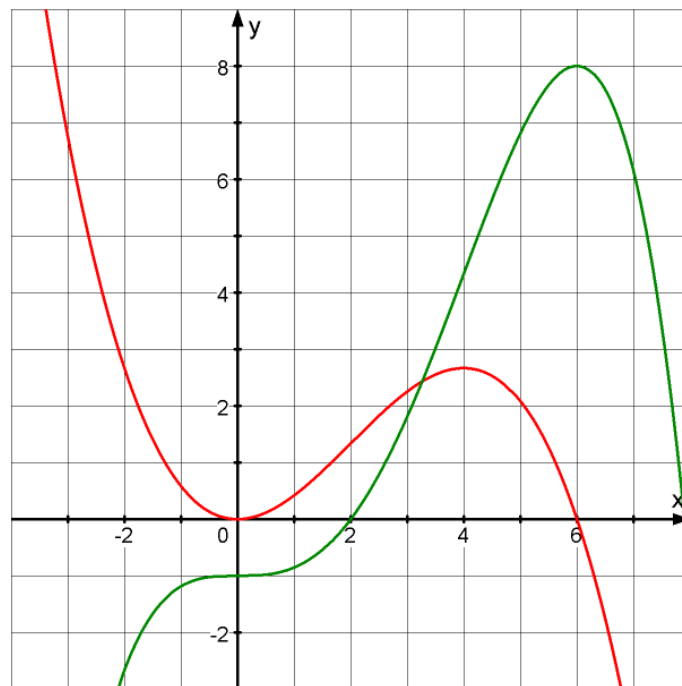
$F(2) = 0$, da die untere Integrationsgrenze immer eine Nullstelle einer Integralfunktion ist.

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 6$	$6 < x < \infty$
$f(x)$	+	+	-

F ist für $-\infty < x \leq 6$ streng monoton zunehmend und für $6 < x < \infty$ streng monoton abnehmend.

$(0 | -1)$ ist ein daher Terrassenpunkt von G_F .

e)



f) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0 \text{ da } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} g(x) = \infty \text{ da } \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 0+0$$

$$\lim_{x \rightarrow 6-0} g(x) = \infty \text{ da } \lim_{x \rightarrow 6-0} f(x) = 0+0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 6+0} g(x) = -\infty \text{ da } \lim_{x \rightarrow 6+0} f(x) = 0-0$$

$$\text{g) } g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$$

Weil f an der Stelle 4 einen Hochpunkt, hat der Graph von g den Tiefpunkt $T\left(4 \mid \frac{3}{8}\right)$.
