Grundkurs 2002	Infinitesimalrechnung	Aufgabe I

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \to x - 2 + \frac{4}{x-1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

   a) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.

   b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

   c) Berechnen Sie $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$ und $f(6)$.

   Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Asymptoten im Bereich $-4 \le x \le 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.

   d) Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $y = -3x + 10$ Tangente an G_f ist, und geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes P an.

   e) G_f, die Gerade g aus Teilaufgabe 1.d) und die Gerade $x = 3$ begrenzen ein endliches Flächenstück vom Inhalt A. Berechnen Sie A.

---

2. Gegeben ist die Funktion $v: t \to v(t) = 5 \cdot (1 - e^{-t})$ mit .

   a) Der Graph dieser Funktion soll skizziert werden. Entwickeln Sie den Graphen von v, indem Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem der Reihe nach die Graphen der folgenden Funktionen für $t \ge 0$ skizzieren:

   i) $t \to e^{-t}$ ii) $t \to -e^{-t}$

   iii) $t \to -e^{-t} + 1$ iv) $t \to v(t)$

   b) In einem Versuch wird die Geschwindigkeit eines Körpers im durch Reibung gebremsten freien Fall untersucht. Die Funktion v beschreibt näherungsweise die Maßzahl der Geschwindigkeit des verwendeten Körpers in Abhängigkeit von der Maßzahl der Zeit t.

   Deuten Sie den Graphen von v in diesem Anwendungsbezug. Gehen Sie insbesondere auf das Verhalten für $t \to \infty$ ein.

Lösung

1. a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (x-2+\frac{4}{x-1}) = \infty,$

weil $\lim\limits_{x \to \infty} (x-) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-2+\frac{4}{x-1}) = -\infty,$

weil $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-2) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} (x-2+\frac{4}{x-1}) = \infty,$

weil $\lim\limits_{x \to 1+0} (x-2) = -1$ und $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{4}{x-1} = \infty$ wegen $\lim\limits_{x \to 1+0} (x-1) = 0+0$

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} (x-2+\frac{4}{x-1}) = \infty,$

weil $\lim\limits_{x \to 1-0} (x-2) = -1$ und $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{4}{x-1} = -\infty$ wegen $\lim\limits_{x \to 1-0} (x-1) = 0-0$

b) $f'(x) = 1+\frac{0\cdot(x-1) - 4\cdot 1}{(x-1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\frac{4}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 -4 = 0$

$(x-1)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = -2 \vee x-1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 1$

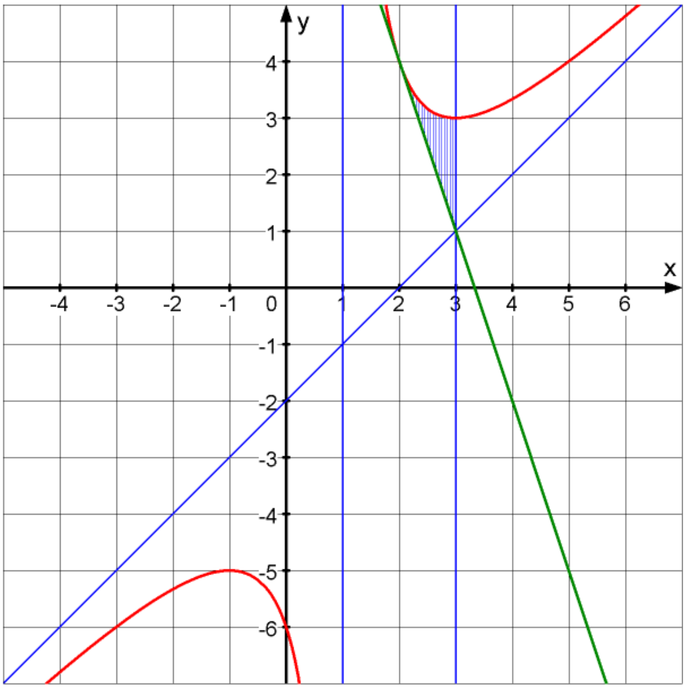
Monotoniebetrachtung:

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x$
$f'(x)$	+	–	–	+

$H\left(-1 \mid -5\right)$ ist ein Hochpunkt und $T\left(3 \mid 3\right)$ ist ein Tiefpunkt.

c) Wertetabelle:

x	-4	0	2	6
f(x)	$-6{,}8$	-6	4	4,8



d) Vermutung: G ist die Tangente im Punkt $B\left(2 \mid 4\right)$.

Nachweis:

(1) $x = 2$ in g ergibt $y = -3 \cdot 2 + 10 = 4$

(2) $f'(2) = 1 - \dfrac{4}{(2-1)^2} = 1 - 4 = -3$

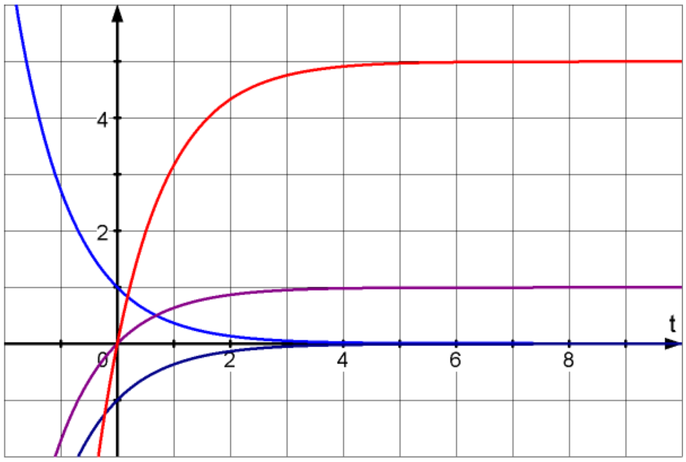
und damit ist alles gezeigt.

e) $\displaystyle\int_2^3 (x - 2 + \frac{4}{x-1} + 3x - 10)dx = \int_2^3 (4x - 12 + \frac{4}{x-1}dx =$

$$= \left[2x^2 - 12x + 4 \cdot \ln(x-1)\right]_2^3 = \left(18 - 36 + 4 \cdot \ln 2\right) - \left(8 - 24 + 0\right) = 4 \cdot \ln 2 - 2$$

2.

a)



b) Die Geschwindigkeit wächst zu Beginn nahezu linear an, der Zuwachs nimmt aber dann rasch ab und die Geschwindigkeit nähert sich eder Grenzgeschwindigkeit

$$v_\infty = \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} 5 \cdot \left(1 - e^{-t}\right) = 5 .$$

Die Reibungskraft nimmt mit der Fallgeschwindigkeit zu. Im Grenzfall ist sie gleich der Gewichtskraft und der Fall erfolgt mit konstanter Geschwindigkeit.