

## VI Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

---

---

### 1 Exponentielles Wachstum

---

#### 2 Zinneseszinsen

a)  $k(t) = 20000 \text{ €} \cdot 1,05^t$

b)

t	1	2	3	5	10
k(t)	21000 €	22050 €	23152,50 €	25525,63 €	32577,89 €

c)  $\frac{k(t+1) - k(t)}{1} = 2000 \text{ €} \Leftrightarrow 1,05^{t+1} - 1,05^t = 0,1 \Leftrightarrow 1,05^t = \frac{0,1}{0,05} = 2$

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1,05} = 14,2$$

d)  $k(t) = 20000 \text{ €} \cdot e^{\ln 1,05 \cdot t} \Rightarrow k'(t) = 20000 \text{ €} \cdot \ln 1,05 \cdot e^{\ln 1,05 \cdot t} = 2000 \text{ €}$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{0,1}{\ln 0,1,05}\right)}{\ln 1,05} = 14,7$$

---

#### 3 Bakterienkultur

t (h)	0	1	2	3
Bakterienanzahl (Mio.)	7,1	7,7	8,3	9,0
		1,0845	1,0779	1,0843

a) s.o.

b)  $N(t) = 7,1 \cdot 10^6 \cdot e^{\ln 1,08 \cdot t}$

c)  $t = \frac{\ln \frac{12}{7,1}}{\ln 1,08} \approx 6,8$

---

#### 4 Graphen

blau	orange	rot
$y = e^{x \cdot \ln 1,5}$	$y = 2 \cdot e^{0,25x}$	$y = 2,5 \cdot e^{-0,4 \cdot x}$

$$k = \frac{\ln \frac{y}{y_0}}{x}$$

---

## 5 Bevölkerungswachstum

$$a) a^{15} = \frac{140}{88,9} \Rightarrow a = \sqrt[15]{\frac{140}{88,9}} \approx 1,031$$

Jährliche Zuwachsrate: 3,1%

b)

Jährliche Zuwachsrate	2,5%	3,0%
Bevölkerungszahl 2006	198 Millionen	212 Millionen

---

## 6 Rauchen

Jahre nach Beendigung des Rauchens	0	2	4	6	8	10
Relatives Risiko in %	38	30	22	17	13	10
		0,79	0,73	0,77	0,76	0,77

a) s.o.

$$b) r(t) = 38\% \cdot 0,88^x = 38\% \cdot e^{x \cdot \ln 0,88} \Rightarrow r(15) = 5,6\%$$

$$c) t_{\text{Nichtraucher}} = \frac{\ln \frac{1}{38}}{\ln 0,88} \approx 28$$

---

## 7 Cholera

$$a) y = y_0 \cdot e^{kt} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{y}{y_0}}{t} \quad k = \frac{\ln \frac{30000}{400}}{2} = 2,16$$

$$b) y = 400 \cdot e^{2,16 \cdot 5} \approx 19,6 \cdot 10^6$$

$$c) \dot{y} = 400 \cdot 2,16 \cdot e^{2,16 \cdot t}$$

t	0	1	2
y	864 h <sup>-1</sup>	7492 h <sup>-1</sup>	64963 h <sup>-1</sup>

---

## 8 Vakuumpumpe

$$y = y_0 \cdot 0,96^t \quad \frac{y}{y_0} = 0,96^{120} = 0,0075$$

Die Vakuumpumpe arbeitet nicht normal.

---

## 9 Schnittpunkt

a) Wachstumsverhalten

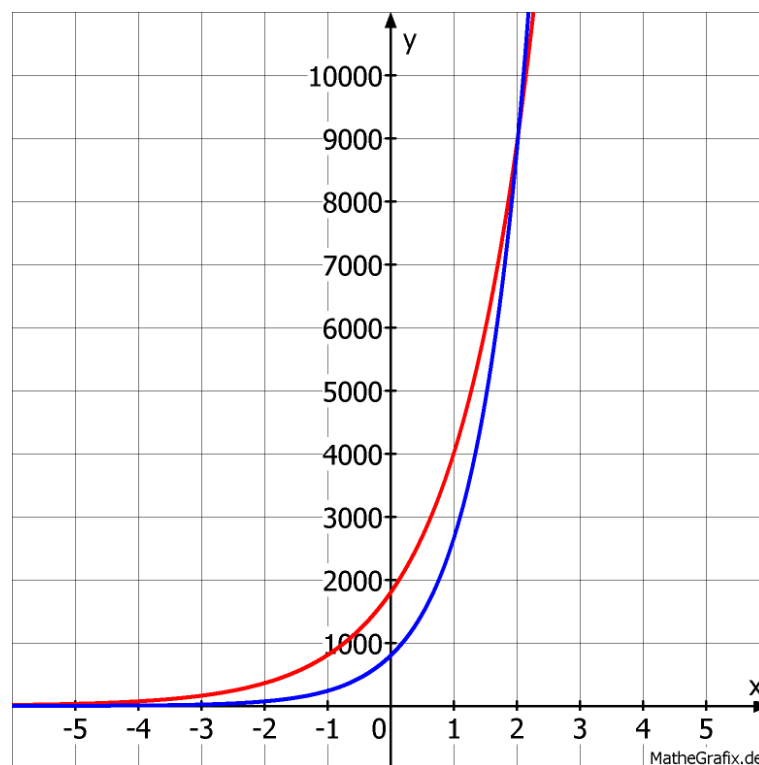
$$\text{b) } 1800 \cdot e^{0,8t} = 800 \cdot e^{1,2t} \Rightarrow e^{0,4t} = \frac{9}{4} \Rightarrow t = \frac{\ln 2,25}{0,4} = 5 \cdot \ln 1,5$$

$$S(5 \cdot \ln 1,5 \mid 9112,5)$$

$$\text{c) } f'(5 \cdot \ln 1,5) = 0,8 \cdot 9112,5 = 7290 \quad g'(t) = 1,2 \cdot 9112,5 = 10935$$

$$\tan \alpha = \frac{10935 - 7290}{1 + 10935 \cdot 7290} \Rightarrow \alpha \approx 0,0026^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_0^{5 \cdot \ln 1,5} (1800 \cdot e^{0,8t} - 800 \cdot e^{1,2t}) dt &= \left[ 2250 \cdot e^{0,8t} - \frac{2000}{3} \cdot e^{1,2t} \right]_0^{5 \cdot \ln 1,5} = \\ &= \frac{9112,5}{0,8} - \frac{9112,5}{1,2} = 3796,88 \end{aligned}$$



---

## 10 Kletterpflanze

a) Die Höhe der Pflanze zum Beobachtungsbeginn beträgt 2 cm.

$$\text{b) } k = \frac{\ln \frac{y}{y_0}}{t} \quad k = \frac{\ln 20}{6} = 0,5$$

$$\text{c) } h(9) = 0,02 \cdot e^{0,5 \cdot 9} = 1,80 \text{ (m)}$$

$$\text{d) } t = \frac{\ln \frac{y}{y_0}}{k} \quad t = \frac{\ln 150}{0,5} = 10$$

$$\text{e) } \frac{y_0 \cdot e^{0,5 \cdot t} \cdot (e - 1)}{1} = 1,5 \Rightarrow t = \frac{1}{0,5} \cdot \ln \frac{1,5}{0,02 \cdot (e - 1)} \approx 7,6$$

$$\text{f) } t = \frac{\ln \frac{y}{k}}{k} \quad t = \frac{\ln \frac{1}{0,02 \cdot 0,5}}{0,5} \approx 9,2$$

$$\text{g) } k(t) = 3,5 - 8,2 \cdot e^{-0,175 \cdot t} \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{0,5}{8,2}}{-0,175} \approx 16$$

---