Normalenform einer Ebenengleichung und Lage im Koordinatensystem

==

1. Bestimmen Sie die Normalengleichung einer der Ebene E

a) mit $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) durch den Punkt $P(5 \mid 3 \mid 1)$ senkrecht zur Geraden $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) durch die Punkte $A(4 \mid -2 \mid -2)$, $B(7 \mid 2 \mid 4)$ und $C(0 \mid -5 \mid -3)$.

---

2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Spurgeraden und zeichnen Sie einen entsprechenden Ausschnitt von E in ein Koordinatensystem.

a) $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 12 = 0$ b) $E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$ c) $E: 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 8$

d) $E: -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 6 = 0$ e) $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

---

3. Bestimme die Gleichung einer Ebene

a) senkrecht zur x_1-Achse durch $P(1 \mid -2 \mid 3)$.

b) parallel zur x_1x_3-Ebene durch $P(2 \mid -3 \mid 5)$

c) welche die Koordinatenachsen in den Punkten $P(3 \mid 0 \mid 0)$, $Q(0 \mid -2 \mid 0)$ und $R(0 \mid 0 \mid 12)$ schneidet.

d) Ebene parallel zur x_3-Achse mit den Achsenschnittpunkten $P(2 \mid 0 \mid 0)$ und $Q(0 \mid 4 \mid 0)$

e) Ebene senkrecht zur x_2x_3-Ebene mit den Achsenschnittpunkten $Q(0 \mid -3 \mid 0)$ und $R(0 \mid 0 \mid 9)$.

---

4. Bestimmen Sie die Normalengleichung einer der Ebene E durch den Punkt $P\left(5 \mid 3 \mid 1\right)$ und

senkrecht zur Geraden $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

---

5. Bestimmen Sie die Normalengleichung einer Ebene E

a) welche $A\left(6 \mid 0 \mid 1\right)$ und $B\left(-1 \mid -2 \mid 2\right)$ enthält und parallel zur x_3-Achse ist.

b) durch $A\left(1 \mid 2 \mid 3\right)$ und $B\left(0 \mid 7 \mid 0\right)$ geht und senkrecht auf der Ebene $x_2 = 7$ steht.

Lagebeziehung zu Geraden

1. Berechne den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E.

a) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{X} - 4 = 0.$

b) $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $F: -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$

c) $k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $G: 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 5 = 0$

---

2. Zeigen Sie, dass die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ parallel zur Ebene

$E: x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ ist.

Geben Sie die Gleichung der Ebene F an, die orthogonal zur Ebene E verläuft und die Gerade g enthält

---

Abstände

1. Gegeben sind der Punkt $P\left(8 \mid -1 \mid 14\right)$ und die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 9 = 0$

a) Berechne den Abstand des Punkte P von der Ebene E.

b) Der Punkt P wird an E gespiegelt. Berechne die Koordinaten des Bildpunktes P'.

---

2. Ein vom Punkt $P\left(4 \mid 5 \mid -1\right)$ ausgehender Lichtstrahl wird an der Ebene

$E : x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7 = 0$ reflektiert.

Der reflektierte Strahl geht durch den Punkt $Q\left(-7 \mid 8 \mid 9\right)$.

Bestimme den Reflexionspunkt R und die Gleichung des reflektierten Strahls.

---

3. Berechne den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

a) $P\left(1 \mid -1 \mid 1\right)$ und $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $P\left(2 \mid 3 \mid 2\right)$ und $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Verschiedenes

===

1. Gegeben sind die Gerade $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 11 = 0$

a) Zeigen Sie, dass die Gerade g nicht parallel zur Ebene E verläuft.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene E.

---

2. Gegeben sind die Punkte $A\left(2 \mid 9 \mid -4\right)$, $B\left(3 \mid 7 \mid -9\right)$ und $C\left(5 \mid 8 \mid 1\right)$ sowie die Geraden

$g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a-6 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene $E\left(ABC\right)$ in Normalenform auf.

b) Berechnen Sie den Parameter a so, dass die Gerade $g = g_a$ parallel zu E verläuft.

c) Zeigen Sie, dass keine Gerade g_a senkrecht auf E steht.

d) Geben Sie eine Gleichung der Lotgeraden l an, die durch den gemeinsamen Aufpunkt der Geraden g_a verläuft und auf der Ebene E senkrecht steht.

e) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkt der Lotgeraden l mit der Ebene E.

f) Berechnen Sie den Abstand der Geraden g aus b) von der Ebene E.