2 Parameterform einer Ebenengleichung

a) $A(2 \mid 3 \mid 1)$, $B(4 \mid 1 \mid -2)$ und $C(3 \mid 2 \mid 2)$

legen die Ebene E(ABC): $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fest.

b) $A(-3 \mid 1 \mid 4)$, $B(-1 \mid 2 \mid 3)$ und $C(0 \mid 3 \mid 4)$

legen die Ebene E(ABC): $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ fest.

---

3 Koordinatengleichungen

a) Die Gleichung $x_3 = 0$ stellt die x_1x_2-Koordinatenebene dar.

b) Die Gleichung $x_1 = 0$ stellt die x_2x_3-Koordinatenebene dar.

c) Die Gleichungen $x_1 = 0$ und die Gleichung $x_2 = 0$ stellen die x_3-Achse dar.

d) Die Gleichungen $x_2 = 0$ und die Gleichung $x_3 = 0$ stellen die x_1-Achse dar.

---

4 Punktetest

E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) $A(8 \mid 3 \mid 14)$ liegt nicht in der Ebene.

$B(1 \mid 0 \mid 0)$ liegt in der Ebene $(\lambda = \mu = -1)$.

$C(4 \mid -3 \mid 9)$ liegt in der Ebene $(\lambda = -4 \text{ und } \mu = 2)$.

b) $D(4 \mid 3 \mid d)$ liegt für $d = 1$ in E.

$F(7 \mid f \mid 2)$ liegt für $f = 6$ in E.

$P(4 \mid 1 \mid p)$ liegt für $p = \frac{11}{3}$ in E.

$Q(0 \mid q \mid q)$ liegt für $q = -\frac{5}{7}$ in E.

$R(2r \mid 4 \mid r)$ liegt für $r = 3$ in E.

---

5 Spurgeraden

$A(0 \mid 0 \mid 4)$, $B(5 \mid 0 \mid 0)$ und $C(0 \mid 4 \mid 0)$

a)

b) E(ABC): $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Spurgerade in der x_1x_2-Koordinatenebene: s_{12}: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Spurgerade in der x_1x_3-Koordinatenebene: s_{13}: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Spurgerade in der x_2x_3-Koordinatenebene: s_{23}: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

6

E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) $S_1(3 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid -4 \mid 0)$ und kein Schnittpunkt mit der x_3-Achse.

---

7 Zimmer

$A(0 \mid 0 \mid 3{,}5)$, $B(4 \mid 4 \mid 4{,}5)$ und $C(6 \mid 4 \mid 2{,}5)$

$$E(ABC)\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

8 Ebene durch Gerade und Punkt

$$g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) $P(4 \mid -2 \mid 1)$ liegt nicht auf g: $E(g;\,P)\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $P(4 \mid -2 \mid 1)$ liegt auf g. P und g legen daher keine Ebene fest.

---

9 Verschiedene Gleichungen eine Ebene

$$E\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) $E\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $E\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Als Aufpunkt kann jeder in der Ebene liegende Punkt dienen. Als Richtungsvektor kann man jede nichttriviale Linearkombination der beiden gegebenen Richtungsvektoren verwenden.

---

10 Spatprodukt

a) $A(0 \mid 1 \mid -1) B(2 \mid 3 \mid 5)$, $C(-1 \mid 3 \mid -5)$ und $D(2 \mid 2 \mid 2)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (12-6+0)-(24+0-6) = -12$$

b) $A\left(3 \mid 0 \mid 2\right)$, $B\left(5 \mid 1 \mid 9\right)$, $C\left(6 \mid 2 \mid 7\right)$ und $D\left(8 \mid 3 \mid 14\right)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 12 \end{vmatrix} = (48+63+40)-(112+30+36) =$$

---

11 Geraden und Ebenen

a) $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $S\left(3 \mid 4 \mid 3\right)$

$E(g;h)\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Geraden g und h sind windschief zueinander.

c) $g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Die Geraden g und h sind echt parallel zueinander.

$$E(g;\,h):\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Nachbargeschwätz

G 12 Körper

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 27\ \text{dm}^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9\text{dm}^2 \cdot 4\ \text{dm} = 30\pi\ \text{dm}^3$$
