S. 134	Gegenseitige Lage von Ebene und Gerade

2 ***2 Ebene und Gerade durch zwei Punkte***

Gegeben: E: $x_1 - 2x_2 + 3x_2 \; + 7 = 0$

a) $AB: \; \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eingesetzt in E: $2 + 3\tau - 2 \cdot 3 + 3 \cdot (1 + \tau) + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau = -1$

Die Gerade schneidet die Ebene im Punkt $S\left(-1 \,|\, 3 \,|\, 0 \right)$.

---

b) $CD: \; \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 - 6 + 3 = 0 \quad \Rightarrow$ g verläuft (echt) parallel zu E.

---

3 Ebene durch drei Punkte und Gerade durch zwei Punkte

Parameterform: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Normalenform: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 3 = 0$

a) $PQ: \; \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eingesetzt in die Gleichung von E ergibt den Schnittpunkt $S\left(7 \,|\, -1 \,|\, 5 \right)$

---

b) PQ : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vergleich mit dem Normalenvektor ergibt, dass g parallel zu E ist.

---

4 Spurpunkte von Geraden

a) $S_{12}\left(2{,}5 \mid 1{,}75 \mid 0\right)$ $S_{13}\left(-1 \mid 0 \mid -7\right)$ $S_{23}\left(0 \mid 0{,}5 \mid -5\right)$

---

b) $S_1\left(0 \mid 8 \mid 1\right)$ $S_2\left(4 \mid 0 \mid 1\right)$

---

5 Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen

a) Normalenvektor: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 3 = 0$

$S_1\left(0{,}6 \mid 0 \mid 0\right)$ $S_2\left(0 \mid 1{,}5 \mid 0\right)$ $S_3\left(0 \mid 0 \mid -0{,}5\right)$

b) $S_1\left(4 \mid 0 \mid 0\right)$ $S_2\left(0 \mid -6 \mid 0\right)$ $S_3\left(0 \mid 0 \mid 3\right)$

c) $S_2\left(0 \mid 6 \mid 0\right)$ $S_3\left(0 \mid 0 \mid 2\right)$

Die Ebene verläuft parallel zur x_1-Achse.

---

6 Würfel

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad -x_1 + x_2 - x_3 + 8 = 0$$

$$\overrightarrow{X} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$AC:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-\nu \\ \nu \\ 8-\nu \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in die Ebenen ergeben sich die Schnittpunkte $S_1\left(\frac{16}{3} \mid \frac{8}{3} \mid \frac{16}{3}\right)$ und

$S_2\left(\frac{8}{3} \mid \frac{16}{3} \mid \frac{8}{3}\right)$

---

7 Parameter

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \to 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2 = 0$$

a) Parallelität: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = 4 - 2a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2{,}5$

Senkrechte: nicht möglich

b) Parallelität: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = 2 - 4a - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}4$

Senkrechte: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}4a = -0{,}5$

---

8 Trivial

---

9 Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \to 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$$

Lotgerade: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Schnittparameter: $21\sigma = -28 \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{4}{3}$

$\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 4/ \end{pmatrix}$ und damit $P'\left(\frac{2}{3} \mid \frac{4}{3} \mid \frac{4}{3}\right)$

---

10 Spiegelung an einer Geraden

a) Man schneidet g mit einer Lotebene zu g durch den Punkt P. Ein Normalenvektor dieser Ebene ist der Richtungsvektor von g. Auf diese Weise erhält man den Lotfußpunkt F.

Für den Bildpunkt $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{P} + 2 \cdot \left(\overrightarrow{F} - \overrightarrow{P} \right) = 2 \cdot \overrightarrow{F} - \overrightarrow{P}$

b) Lotebene zu g durch P: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 2x_{+2} - x_3 + 7 = 0$

Schnitt mit der Geraden g:

$3 + \lambda - 2 \cdot (1 - 2\lambda) + (-2 + \lambda) + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\lambda + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1$

Eingesetzt in g : $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad P'(2 \mid 3 \mid 9)$

---

11 Dreieck

a) Gerade AB : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ebene E durch C senkrecht zu AB: $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\right]=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1+2x_2-x_3-11=0$

Schnitt von AB mit E: $2+\mu+2\cdot2\mu-(3-\mu)-11=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mu=2$

Eingesetzt in AB ergibt: $F(4\,|\,4\,|\,1)$

b) $\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad h_c=\overline{CF}=2\sqrt{3}$

$\overline{AB}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$ und damit $A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{6}\cdot2\sqrt{3}=9\sqrt{2}$

c) Das Dreieck ist rechtwinklig bei C. Also $A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}$

d) $\tan\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{(-3)^2+3^2}}{6}=\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx35{,}3° \quad\Rightarrow\quad \beta\approx54{,}7°$

---

12. Gemeinsame Lotgerade zu zwei zueinander windschiefen Geraden

a) Man erstellte die Gleichung der Ebene E durch die Gerade g senkrecht zur Geraden h.

Ein Richtungsvektor von E ist der Richtungsvektor von g und ein zweiter eine Vektor, der auf den Richtungsvektoren von g und h senkrecht steht.

Schneidet man E mit h dann erhält man R und kann so die Gleichung der Lotgeraden l aufstellen.

b) Richtungsvektor von l: $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Parametergleichung von E_

$$E:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenform von E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_3 - 4 = 0$

Schnitt mit der Geraden h: $8 + 3\mu + 8 + \mu - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -3$

Eingesetzt in h: $\vec{R} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lotgerade l: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt von l und g: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 2 \text{ und } \lambda = -2$

Eingestzt ergibt sich: $S(1 \mid -2 \mid 3)$
