2 Schnitt von Ebenen

a) $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$ und $F: x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$

$E + F: 2x_1 + 4x_3 - 10 = 0$

Parametrisierung: $x_3 = \lambda \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 - 2\lambda$

In F eingesetzt: $5 - 2\lambda + 2x_2 + \lambda - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda$

Schnittgerade: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

b) $E: 7x_1 - 5x_2 + x_3 - 21 = 0$ und $F: x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$

$E - F: 6x_1 - 3x_2 - 15 = 0$

Parametrisierung: $x_1 = \lambda \quad \Rightarrow \quad x_2 = -5 + 2\lambda$

In F eingesetzt: $\lambda - 2 \cdot (-5 + 2\lambda) + x_3 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = -4 + 3\lambda$

Schnittgerade: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

---

3 Spurgeraden

a) $E: 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

Schnittgerade mit der $x_1x_2 -$Ebene : $x_3 = 0$

In die Gleichung von E eingesetzt:

$4x_1 - 3x_2 + 15 = 0$

Parametisierung: $x_2 = \sigma$

$4x_1 - 3\sigma + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0{,}75\sigma - 3{,}75$

Schnittgerade mit der x_1x_2-Koordinatenebene:

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3{,}75+0{,}75\sigma \\ \sigma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade mit der x_1x_3-Ebene : $x_2 = 0$

In die Gleichung von E eingesetzt:

$4x_1 - 2x_3 + 15 = 0$

Parametisierung: $x_1 = \tau$

$4\tau - 2x_3 + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2\tau + 7{,}5$

Schnittgerade mit der x_1x_3-Koordinatenebene:

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ 7{,}5+2\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade mit der x_2x_3-Ebene : $x_1 = 0$

In die Gleichung von E eingesetzt:

$-3x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

Parametisierung: $x_2 = \nu$

$-3\nu - 2x_3 + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1{,}5\nu + 7{,}5$

Schnittgerade mit der x_1x_2-Koordinatenebene:

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ 7{,}5-1{,}5\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

---

b) $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-3\\5\end{pmatrix}$

Normalenform von E : $\begin{pmatrix}-9\\-6\\4\end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right] = -9x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 32 = 0$

Anschließend rechnen Sie analog wie in Aufgabe a).

---

4 Gegenseitige Lage von Ebenen

a) $E_1 : \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$ und $E_2 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 12 = 0$

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \wedge \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 \parallel E_2$$

oder man zeigt, dass die Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig sind.

----

b) $E_1 : \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $E_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Normalenform:

(1) $E_1 : \begin{pmatrix}-7\\5\\-1\end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right] = -7x_1 + 5x_2 - x_3 + 21 = 0$

(2) $E_2 : \begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} 5\right] = -5x_1 + x_2 + x_3 + 15 = 0$

(1) + (2) ergibt $-12x_1 + 6x_2 + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x_1 + x_2 + 6 = 0$

Parametrisierung $x_1 = \sigma$ ergibt $-2\sigma + x_2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -6 + 2\sigma$

Eingesetzt in(2) $-5\sigma - 6 + 2\sigma + x_3 + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -9 + 3\sigma$

Als Schnittgerade s ergibt sich dann $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \sigma \\ -6+2\sigma \\ -9-3\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $E_1 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$

$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 32 = 0$

und

$E_2 : 2x_1 - 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3 - 12 = 0$

$E_1 - 2 \cdot E_2 : \ -4x_2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$

In $E_1 : 4x_1 + 10 + 3x_3 - 32 = 0$

Parametrisierung $x_3 = \sigma : x_1 = 5{,}5 - 0{,}75\sigma$

Schnittgerade s : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -0{,}75 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

5 Spurgeraden

a) $E : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenform von E:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5 = 0$$

Dann wie in Aufgabe 2.

$$s_{12}: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}8 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad s_{13}: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$s_{23}: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $E: 2x_1 - 3x_2 - 6 = 0$

Die Ebene ist parallel zur x_3-Achse.

---

x_1x_2-Koordinatenebene $x_3 = 0$.

Parametrisierung: $x_2 = \sigma$ ergibt $2x_1 - 3\sigma - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 + 1{,}5\sigma$

und damit ist für die Spurgerade von E in der x_1x_2-Koordinatenebene gegeben durch

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 + 1{,}5\sigma \\ \sigma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

x_1x_3-Koordinatenebene: $x_2 = 0$

Eingesetzt ergibt sich $2x_1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$, während $x_3 = \tau$ beliebig ist.

Damit ist für die Spurgerade von E in der x_1x_3-Koordinatenebene gegeben durch

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

x_2x_3-Koordinatenebene: $x_1 = 0$

Eingesetzt ergibt sich $-3x_2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$, während $x_3 = \nu$ beliebig ist.

Damit ist für die Spurgerade von E in der x_2x_3-Koordinatenebene gegeben durch

---

6 Lotebenen und parallele Ebenen

a) $E: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P(3 \mid 4 \mid -1)$

Normalenform von E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = x_1 - x_2 + x_3 - 7 = 0$

Ebene durch P parallel zu E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0$

Ebene durch P senkrecht zu E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = x_1 + x_2 - 7 = 0$

b) $E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 12 = 0$

Ebene durch P parallel zu E: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 8 = 0$

Ebene durch P senkrecht zu E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 2x_1 + 3x_2 - 17 = 0$

---

7 Schnittpunkt dreier Ebenen

(1) $E_1: x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0$

(2) $E_2: 2x_1 + x_2 - x_3 + 4 = 0$

(3) $E_3: x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3 = 0$

$(1)+(2): 3x_1 - x_2 + 2 = 0$

Parametrisierung: $x_1 = \sigma \quad \Rightarrow \quad 3\sigma - x_2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 + 3\sigma$

In (1) eingesetzt: $\sigma - 2\cdot(2+3\sigma) + x_3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 6 + 5\sigma$

Schnittgerade s von E_1 und E_2: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \sigma \\ 2+3\sigma \\ 6+5\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

In (3) eingesetzt: $\sigma - 2\cdot(2+3\sigma) - 2\cdot(6+5\sigma) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -15\sigma - 19 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = -\frac{19}{15}$

Eingesetzt in s : $S\left(-\frac{19}{15} \mid -\frac{9}{5} \mid -\frac{1}{3}\right)$

Ergebnis ist scheußlich, stimmt aber!

---

8 Übersicht über die Lagebeziehungen von Ebenen

Die Ebenen seien gegeben durch

$E: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$

$F: b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0$

$G: c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4 = 0$

mit den Normalenvektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ sowie den erweiterten Normalenvektoren

$$\overrightarrow{a^*} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b^*} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{c^*} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Damit die Ebenen E, F und G paarweise voneinander verschieden sind, müssen die erweiteren Normalenvektoren $\overrightarrow{a^*}$, $\overrightarrow{b^*}$ und $\overrightarrow{c^*}$ paarweise voneinander linear unabhängig sein.

$\boxed{\text{Fall 1}}$

Die Ebenen sind genau dann paarweise parallel, wenn ihre Normalenvektoren paarweise voneinander linear abhängig sind.

$\boxed{\text{Fall 2}}$

Wenn genau zwei Normalenvektoren linear abhängig voneinander sind, dann werden die zwei zugehörigen parallelen Ebenen von der dritten Ebene in zwei parallelen Geraden geschnitten.

$\boxed{\text{Fall 3}}$

Wenn die drei Normalenvektoren voneinander linear abhängig, aber paarweise voneinander linear unabhängig sind und die drei erweiterten Normalenvektoren linear unabhängig voneinander sind, dann sind die Schnittgeraden von je zwei Ebenen echt parallel.

$\boxed{\text{Fall 4}}$

Wenn die drei Normalenvektoren voneinander linear unabhängig sind, dann schneiden sich die Ebenen in einem Punkt.

$\boxed{\text{Fall 4}}$

Wenn die drei erweiterten Normalenvekoren voneinander linear abhängig sind, dann haben die drei Ebenen eine gemeinsame Schnittgerae.

---

9 Schnittgerade

Parameterform der Ebenen:

$$E(ABC):\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad E(DEF):\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Normalenform der Ebenen:

$$(1)\ E(ABC):\ \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}\right] = -2x_1+x_2+x_3+6 = 0$$

(2) E(DEF) : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 21 = 0$

$(1)+(2)$ ergibt $2x_2 + 3x_3 - 15 = 0$

Parametrisierung $x_3 = \nu$ ergibt $x_2 = 7{,}5 - 1{,}5\nu$

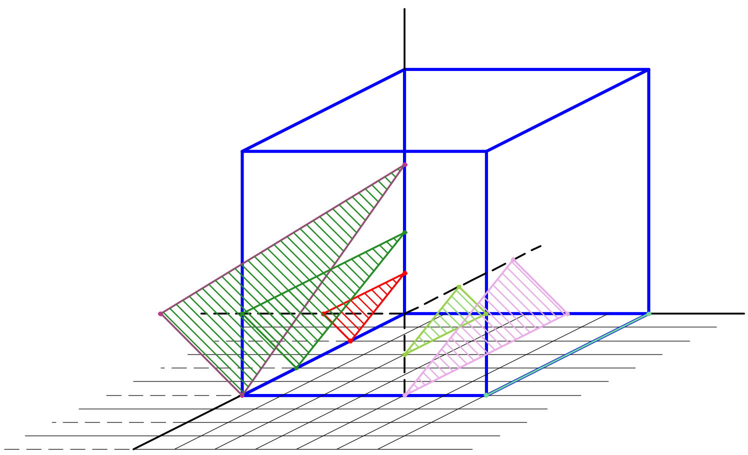
In (2) eingesetzt: $2x_1 + 7{,}5 - 1{,}5\nu + 2\nu - 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6{,}75 - 0{,}25\nu$

Schnittgerade: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 6{,}75 - 0{,}25\nu \\ 7{,}5 - 1{,}5\nu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}75 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

10 Ebenenschar

a)



b) $E: x_1 - x_2 + 2x_3 + a = 0$

$F(6\,|\,0\,|\,6)$ eingesetzt $6 - 0 + 12 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -18$

$C(0\,|\,6\,|\,0)$ eingesetzt $-6 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 6$

Gemeinsame Punkte gibt es für $-18 \le a \le 6$

---

11 Ebenen und Kugel

$$E_1 : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 21 = 0$$

a) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = -6 - 12 + 18 = 0 \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 12 - 6 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 \parallel E_2$

b) $l : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenform von E_1 : $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 16 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 119 = 0$

$$6 \cdot (9 + 6\sigma) - 3 \cdot (-2 - 3\sigma) + 2 \cdot (5 + 2\sigma) - 119 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = 1$$

$S_1(15 \mid -5 \mid 7)$

$$6 \cdot (9 + 6\sigma) - 3 \cdot (-2 - 3\sigma) + 2 \cdot (5 + 2\sigma) - 21 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = -1$$

$S_2(3 \mid 1 \mid 3)$

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1S_2} = \sqrt{144 + 36 + 16} = 14$$

Der Mittelpunkt der Strecke $[S_1S_2]$ hat den Ortsvektor $\frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} \right) = \overrightarrow{M}$ und damit ergibt sich als Gleichung der Kugel

$$\left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]^2 = 49$$

Die beiden Ebenen sind Tangentialebenen an die Kugel.

G 12 Trigonometrische Gleichung

$3\cos x = 2\sin^2 x \quad x \in \left[0; 2\pi\right]$

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2u^2 + 3u - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -2 \vee u = \frac{1}{2}$ **mit** $u = \sin x$

$\pi \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}\pi \vee u = \frac{5}{3}\pi$

G 13 Funktionsterm

$f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

x-Koordinate des Scheitels: $x_S = 0{,}5$