Funktionen
==

Eine ***Funktion f*** ist eine Zuordnung, die jedem x aus einer Menge ***D*** reeller Zahlen eindeutig eine relle Zahl y zuordnet.

Man schreibt $f : x \to y$ und spricht "f bildet x auf y ab".

Meist erhält man y durch Einsetzen in einen Term f(x), den ***Funktionsterm*** der Funktion.

Die Gleichung

$$\boxed{\mathbf{y = f(x)}}$$

heißt Funktionsgleichung der Funktion.

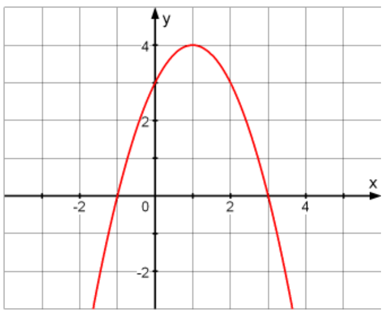
Die Menge D heißt ***Defintionsmenge*** der Funktion. Alle y-Werte bilden die ***Wertmenge W*** der Funktion.

Die Punkte $\left(x;\ y = f(x)\right)$ bilden den *Graphen* der Funktion.

Beispiele :

a) $f : x \to y = -x^2 + 2x + 3$ mit $D_{max} = \mathbb{R}$ heißt quadratische Funktion.

Ihr Graph ist eine Parabel.

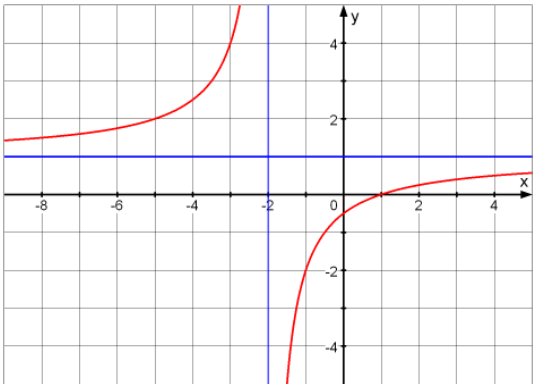


Der Punkt $\left(1;\ 4\right)$ ist ein Hochpunkt des Graphen und heißt Scheitel der Parabel.

Die Wertemenge von f ist $W =]-\infty;\ 4]$.

b) $f : x \to \dfrac{x-1}{x+2}$ mit $D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ ist eine gebrochen-rationale Funktion.

In diesem besonderen Fall ist der Graph eine Hyperbel.



Die Wertemenge von f ist $W = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Begründung :

Auflösung der Gleichung $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ nach x ergibt

$y \cdot (x+2) = x-1 \quad \Rightarrow \quad yx+2y = x+1 \quad \Rightarrow \quad yx-x = 1-2y \quad \Rightarrow \quad x \cdot (y-1) = 1-2y$

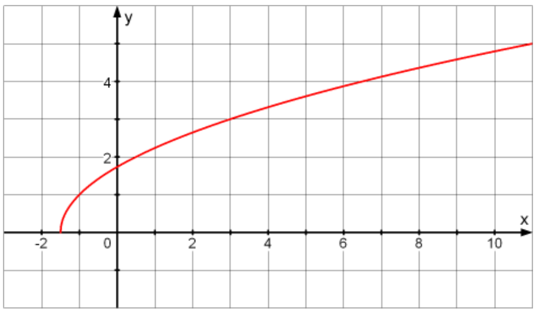
$x = \dfrac{1-2y}{y-1}.$

Diese Auflösung ist aber nur für $y \neq 1$ möglich.

c) $f : x \rightarrow y = \sqrt{2x+3}$ mit $D_{max} = [-\frac{3}{2}; \infty[$ ist eine Wurzelfunktion.

Beachte : Die Defintionsmenge ergibt sich aus der Bedingung $2x+3 \geq 0$

Ihr Graph ist in diesem besonderen Fall der gespiegelte Ast einer Parabel.



Allgemein gilt für die Bestimmung der maximalen Defintionsmenge D_{max} einer Funktion f

a) der Nenner einer gebrochen-rationalen Funktion darf nicht den Wert 0 annehmen.

b) der Radikand einer Wurzelfunktion darf keinen negativen Wert annehmen.

Schnittpunkte

==

a) Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen

$x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$ heißt ***Nullstelle*** der Funktion f.

Der Punkt $S_x(x_o; 0)$ ist dann ein Schnittpunkt des Graphen von f mit der x-Achse.

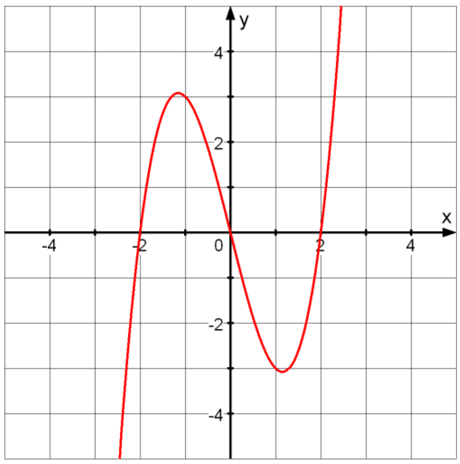
Ist $0 \in D$, dann ist $S_y(0; f(0))$ der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse.

Beispiel :

Die Nullstellen der ganzrationalen Funktion $f : x \to x^3 - 4x$ mit $D = D_{max} = \mathbb{R}$ ergeben sich zu

$$x^3 - 4X = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x+2) \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

Wegen $f(0) = 0$ ist der Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0; 0)$.



b) Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen f und g erhält man aus der Schnittpunktsbedingung

$$\boxed{\mathbf{f(x) = g(x)}}$$

Ist x_0 eine Lösung dieser Gleichung, dann ist $S\left(x_0; f(x_o) = g(x_0)\right)$ zugehöriger Schnitt-punkt.

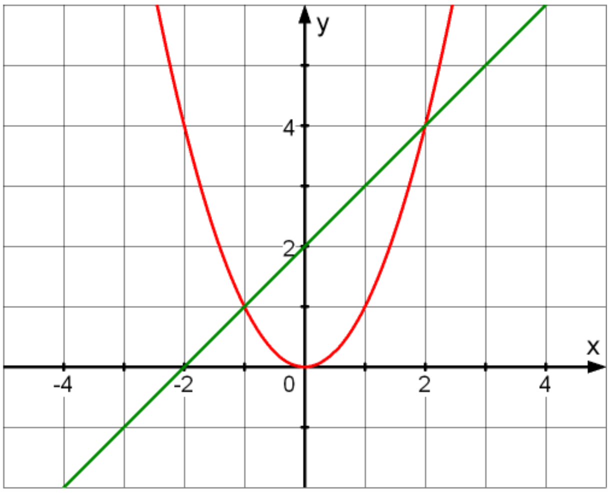
Beispiel :

Bestimmung der Schnittpunkte der Graphen von $f : x \to x^2$ und $g : x \to y = x + 2$.

$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -1$

$f(-1) = 1$ und $f(2) = 4$

$S_1\left(-1;\, 1\right)$ und $S_2\left(2;\, 4\right)$



Lineare Funktionen
==

Definition und Satz :

Eine Funktion

$f: x \rightarrow y = mx + t, \; D = \mathbb{R}, m, t \in \mathbb{R},$

heißt ***lineare Funktion***.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Die Funktionsgleichung $y = mx + t$ heißt deshalb auch ***Geradengleichung***.

Ist α der Winkel, den diese Gerade mit der positiven x-Achse bildet, dann gilt

$$\boxed{\mathbf{m = \tan \alpha}}$$

m heißt deshalb ***Steigungsfaktor*** oder ***Steigung*** der Geraden und α heißt ***Neigungswinkel*** der Geraden.

Die y-Achse wird von ihr im Punkt $S_y(0\,;\,t)$ geschnitten. t heißt deshalb ***y-Abschnitt*** der Geraden.

Anwendungen :

a) Aufstellen von Geradengleichungen

Eine Gerade durch die Punkte $P(x_1; y_1)$ und $Q(x_2; y_2)$ hat die Gleichung

$$\boxed{\mathbf{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}}$$

Beispiel :

Die Gerade durch die Punkte $P(-1; 2)$ und $Q(3; 4)$ hat die Gleichung

$$y = \frac{4-2}{3+1}\cdot(x+1)+2 = \frac{1}{2}\cdot(x+1)+2 = \frac{1}{2}x+2{,}5$$

b) Der Schnittwinkel zweier Geraden

Definition und Satz :

Unter dem Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden versteht man nichtstumpfen Winkel, den die beiden Geraden miteinander bilden.

Für den Schnittwinkel σ zweier Geraden mit den Steigungsfaktoren m_1 und m_2

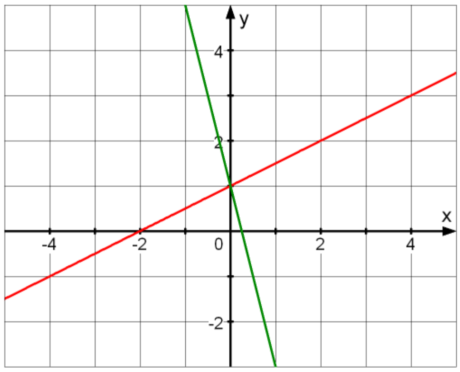
$$\boxed{\mathbf{\tan\sigma = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|}}\text{, falls } m_1\cdot m_2 \neq -1$$

Gilt $\mathbf{m_1\cdot m_2 = -1}$, dann stehen die Geraden aufeinander senkrecht.

Beispiel :

Für den Schnittwinkel der Geraden $g : y = \frac{1}{2}x + 1$ und $h : y = -4x + 1$ gilt

$$\tan\sigma = \left|\frac{0{,}5+4}{1+0{,}5\cdot(-4)}\right| = 4{,}5 \quad\Rightarrow\quad \sigma \approx 77{,}5°$$



Geraden parallel zur y-Achse sind keine Graphen von Funktionen.

Sie werden durch eine Gleichung der Form $\mathbf{x = c}$, , $c \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ beliebig, beschrieben.

Allgemein gilt :

Die Menge der Punkte P(x; y), deren Koordinaten eine Gleichung der Form

$$\mathbf{ax + by + c = 0},\ a \neq 0 \ \text{ oder } \ b \neq 0,$$

erfüllen; liegen auf einer Geraden. Man spricht von einer ***impliziten*** Geradengleichung.

Beispiel :

Die explizite Geradengleichung der Geraden $g : 2x - 3y + 1 = 0$ lautet $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

d) Geradenscharen

Eine Zuordnung

$f_a : x \rightarrow f_a(x) = f(a,x)$,

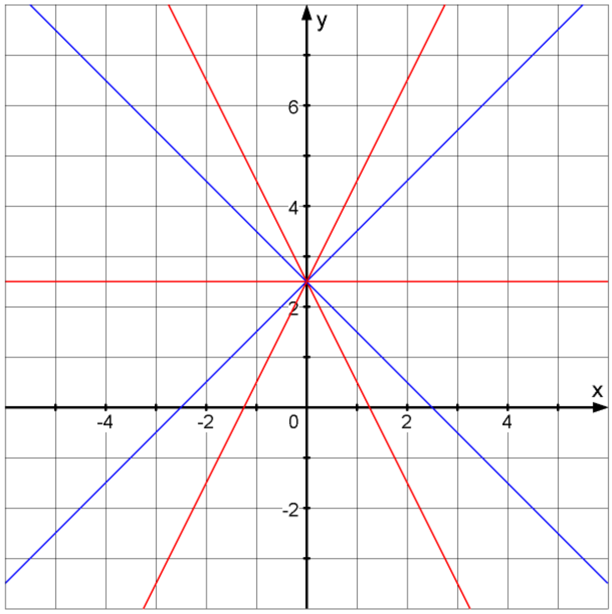
deren Funktionsterm neben der veränderlichen Zuordnungsvariablen x, eine weitere Variable a enthält, so dass jeder für a zulässige Wert eindeutig eine Funktion festlegt, heißt einparametrige Funktionenschar mit dem Parameter a.

Beispiel :

Die Funktionenschar $f_a : x \rightarrow y = a \cdot x + 2{,}5$, $a \in \mathbb{R}$, $D_{f_a} = \mathbb{R}$ definiert für jedes reelle a eine lineare Funktion.

Die Graphen der Scharfunktion sind, mit Ausnahme der y-Achse, alle Geraden durch den Punkt S(0; 2,5). Man spricht von einem Geradenbüschel mit dem Büschelpunkt S.

Das Bild zeigt Bilder der Funktionen f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1 und f_2



Quadratische Funktionen
==

Definition und Satz :

Eine Funktion $f : x \rightarrow y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$, $D = \mathbb{R}$, heißt quadratische Funktion.

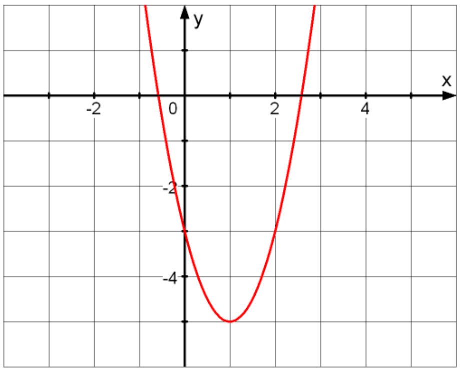
Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine nach oben ($a > 0$) bzw. nach unten ($a < 0$) geöffnete Parabel.

Beispiel :

Scheitelbestimmung der quadratischen Funktion : $f : x \rightarrow y = 2x^2 - 4x - 1$

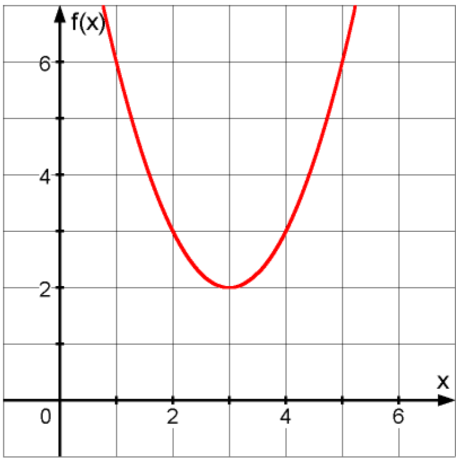
$y = 2x^2 - 4x - 3 = 2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1) - 3 = 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 2 - 3 = 2 \cdot (x - 1)^2 - 5$

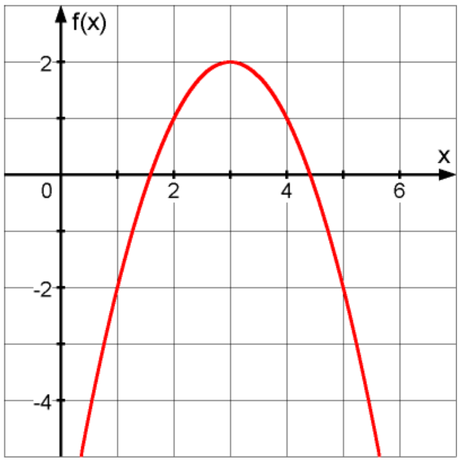
ergibt $S\left(1;\ -5\right)$



Besondere Eigenschaften von Funktionen
==
Monotonie

$f_1 : x \to (x-3)^2 + 2$ $f_2 : x \to -(x-3)^2 - 2$





Definition :

Eine Funktion f heißt auf einer Teilmenge D_1 ihrer Definitionsmenge D ***monoton steigend***, wenn für alle $x_1, x_2 \in D_1$ mit $x_1 < x_2$ gilt :

$$f(x_1) \le f(x_2)$$

Sie heißt auf D_1 ***monoton fallend***, wenn für alle $x_1, x_2 \in D_1$ mit $x_1 < x_2$ gilt :

$$f(x_1) \ge f(x_2)$$

Gilt unter der gemachten Voraussetzung sogar $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$, dann spricht man von strenger Monotonie.

Beispiele :

a) $f : x \to \frac{1}{x^2+1}$, $D = \mathbb{R}$ auf $D_1 = [0;\infty[$ streng monoton steigend,

denn aus $x_1 < x_2$ d.h. $x_2 - x_1 > 0$.folgt

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2{}^2+1} - \frac{1}{x_1{}^2+1} = \frac{x_1{}^2 - x_2{}^2}{(x_1{}^2+1)(x_2{}^2+1)} = \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{(x_1{}^2+1)(x_2{}^2+1)} < 0$$

d.h. $f(x_1) > f(x_2)$

b) $f : \to x^2 + 2x$ ist in $]-\infty; -1]$ smf und in $[-1; \infty[$ sms,

da der Graph eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel bei $x = -1$ ist.

Beschränktheit

Definition :

Eine Funktion heißt ***nach unten beschränkt***, wenn es eine Zahl s gibt mit $s \le f(x)$ für alle $x \in D$

Die größte untere Schranke heißt ***Infimum von f*** i. Z. ***inf(f)***.

Eine Funktion heißt ***nach oben beschränkt***, wenn es eine Zahl S gibt mit $S \ge f(x)$ für alle $x \in D$

Die kleinste obere Schranke heißt ***Supremum von f*** i. Z. **sup(f.)**

Eine Funktion heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiel :

$f : x \to \frac{x^2}{x^2+1}$, $D = \mathbb{R}$, ist beschränkt. Es ist $\inf(f) = 0$ und $\sup(f) = 1$.

Das Infimum wird (bei $x = 0$) angenommen, jedoch nicht das Supremum.

Symmetrie

Satz :

Der Graph einer Funktion f ist ***achsensysymmetrisch*** zur y-Achse, wenn

$$\mathbf{f(-x) = f(x)}.$$

Der Graph einer Funktion f ist ***achsensysymmetrisch*** zur Geraden $x = a$, wenn

$$\mathbf{f(a-h) = f(a+h)}.$$

Beispiele :

a) $f : x \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$ ist symmetrisch zur y-Achse , denn $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$

b) $f : x \rightarrow \frac{1}{x^2+2x}$ ist symmetrisch zur Geraden $x = -1$, denn

$$f(1-h) = \frac{1}{(-1-h)^2+2\cdot(-1-h)} = \frac{1}{h^2-1} \text{ und}$$

$$f(-1+h) = \frac{1}{(-1+h)^2+2\cdot(-1+h)} = \frac{1}{h^2-1}$$

Satz :

Der Graph einer Funktion f ist ***punktssymmetrisch*** Ursprung, wenn

$$\mathbf{f(-x) = -f(x)}$$

Der Graph einer Funktion f ist ***punktssymmetrisch*** zum Punkt Z(a;b)

$$\mathbf{f(a+h)+f(a-h) = 2b}$$

a) $f : x \rightarrow \frac{x}{x^2+1}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1}$$

b) $f : x \to \frac{x+1}{x-1}$ ist punktsymmetrisch zum Punkt Z(1; 1), denn

$$f(1-h)+f(1+h) = \frac{(1-h)+1}{(1-h)-1} + \frac{(1+h)+1}{(1+h)-1} = \frac{2-h}{-h} + \frac{2+h}{h} = 2$$

Ganzrationale Funktionen

Definition :

Eine Funktion

$f : x \to y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$, $D = \mathbb{R}$

heißt ***ganzrationale Funktion*** vom ***Grad n***. Man schreibt $\deg(f) = n$ und bezeichnet den Funktionsterm als ***Polynom*** n.ten Grades.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion

Beispiel : $f : x \to x^3 - 2x^2 - x - 6$, $D = \mathbb{R}$

Nullstellen von f : $x^3 - 2x^2 - 5x - 6 = 0$

Erraten : $x = 1$

Polynomdivision : $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x + 6$

Weitere Nullstellen :$x = -2 \vee x = 3$

Faktorisierung : $y = f(x) = (x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$

***Faktorisierungssatz* :**

Ist x_0 eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion, dann ist der Funktionsterm durch $x - x_0$ teilbar. Sind die Koeffizienten des Funktionsterms ganze Zahlen, dann ist jede ganzzahlige Nullstelle x_0 ein Teiler von x_0.

Bemerkung :

Ist eine Zerlegung $f(x) = (x - x_0)^p \cdot g(x)$ mit $g(x_0) \neq 0$ möglich, dann heißt x_0 eine Nullstelle p-facher Ordnung von f.

Satz :

Jede ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen. Ein Vorzeichenwechsel tritt nur bei Nullsellen ungerader Ordnung auf.

Beispiel :

Die Funktion

$$f : x \to \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

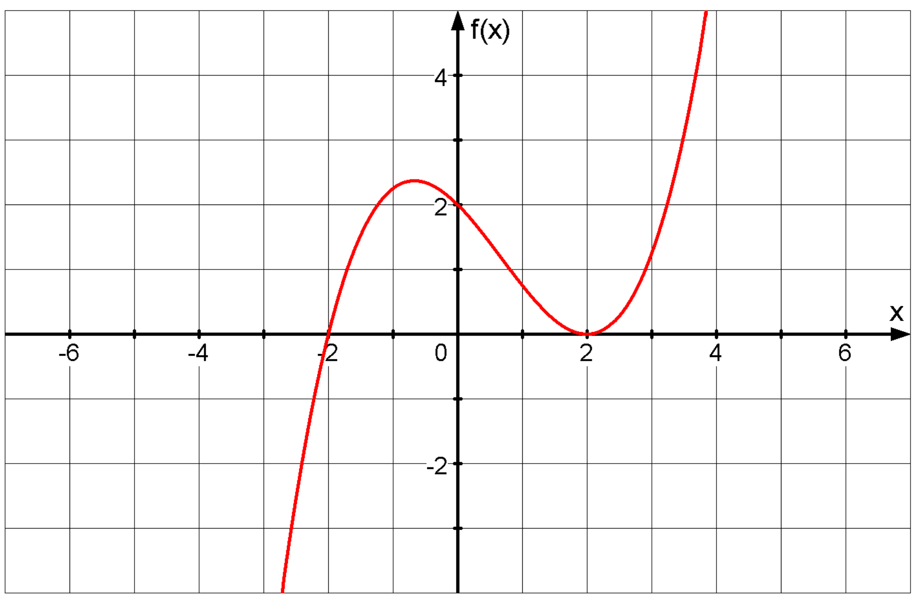
besitzt die die einfache Nullstelle -2 und die doppelte Nullstelle 2.

Also ist $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x-2)^2$.

Vorzeichentabelle :

Faktor	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

Veranschaulichung :



Gebrochen rationale Funktionen
==

Definition :

Seien g und h zwei ganz rationale Funktionen mit. Dann heißt

$$f : x \to \frac{g(x)}{h(x)} \text{ mit } D = D_{max}$$

gebrochen rationale Funktion.

Beispiele :

a) $f : x \to \frac{1}{x^2 - 1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

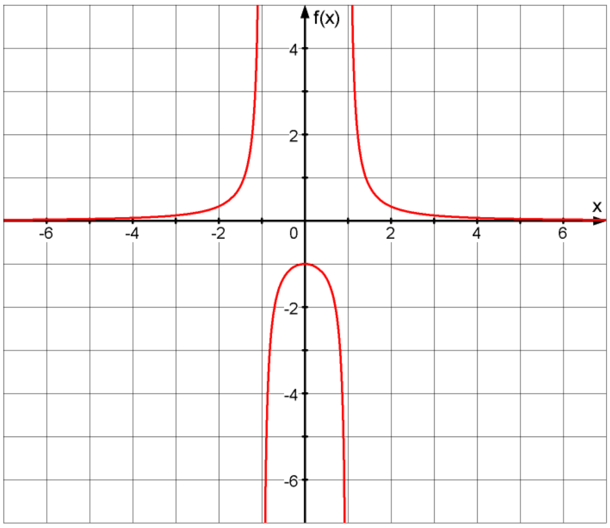
1. Symmetrie

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f(x)$ zeigt, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.

2. Vorzeichenverhalten

Faktordarstellung : $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$

Faktor	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$



Die Funktionswerte werden in der Umgebung der Definitionlücken beliebig groß bzw. beliebig klein) während die Funktionswerte für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ gegen Null gehen.

Zeigt eine gebrochen rationale Funktion an an einer Definitionslücke x_0 ein derartiges Verhalten, dann nennt man x_0 eine ***Unendlichkeitsstelle*** der Funktion.

---

b) $f: x \to \frac{x^2-1}{x-1}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Die Umformung $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$ zeigt, dass die Definitionslücke $x_0 = 1$ keine Unendlichkeitstelle ist.

Der Graph von f ist die Gerade $y = x+1$ ohne den Punkt $\left(1; 2\right)$.