Das Vektorprodukt und seine Anwendungen

==

1. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A\left(7 \mid 0 \mid -1\right)$, $B\left(5 \mid -3 \mid -1\right)$ und $C\left(4 \mid 0 \mid 1\right)$.

   Berechne den Flächeninhalt des Dreieck!

----

2. Gegeben ist das Viereck ABCD mit $A\left(2 \mid 5 \mid -1\right)$, $B\left(5 \mid 6 \mid -5\right)$, $C\left(0 \mid 6 \mid -4\right)$ und $D\left(-3 \mid 5 \mid 0\right)$.

   Berechne den Flächeninhalt des Vierecks.

----

3. Gegeben sind die Punkte $A\left(-1 \mid -4 \mid 3\right)$ und $B\left(4 \mid 0 \mid 6\right)$.

   Bestimmen Sie einen Punkt C auf der x_3-Achse so, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt Flächeninhalt 12 hat.

----

4. Die Punkte $A\left(3 \mid 1 \mid 0\right)$, $B\left(-4 \mid 1 \mid 7\right)$ und $C\left(5 \mid 3 \mid -1\right)$ sind die Ecken der Grundfläche ABC eines geraden dreiseitigen Prismas mit der Höhe $h = 6$.

   Berechne die Koordinaten der übrigen Eckpunkte sowie das Volumen des Prismas.

Lösungen

===

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{133}$$

---

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ d.h. das Viereck ist eine Raute.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{ABCD} = \sqrt{1^2 + 17^2 + 5^2} = \sqrt{314{,}5}$$

---

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} \text{ mit } \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 21$$

$$\overrightarrow{AE} = \pm\frac{6}{21} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Mit $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{AD}$ ergibt sich $D_1\left(-1 \mid 3 \mid -4\right)$ und $D_2\left(7 \mid -1 \mid 4\right)$.

Analog erhält man die Punkte E und F.
