Umkehrfunktionen

===

1. Gegen ist die Funktion $f : x \to f(x) = \sqrt{2x+3}$ mit maximaler Definitionsmenge.

   a) Bestimme D und zeige, dass D auf ganz umkehrbar ist.

   b) Bestimme den Funktionsterm $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion f^{-1} sowie die Defintions- und Wertemenge der Umkehrfunktion.

   c) Bestimme möglichst einfach die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen von f und f^{-1}.

   Zeichne beide Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

   d) Bestimme die Ableitung von f im Punkt $P\left(6{,}5 \mid 4\right)$ nur mit Hife der Ableitung von f^{-1}

----

2. Ermittle die maximale Definitionsmenge D der Funktion f und zeige, dass die Funktion auf ganz D umkehrbar ist. Bestimme einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} und deren Definitions- und Wertemenge.

   a) $f : x \to f(x) = e^{1-2x}$

   b) $f : x \to 2 \cdot \ln(x-1)$

   c) $f : x \to f(x) = 1 - 2e^{-\frac{x}{3}}$

   d) $f : x \to f(x) = 3 - 2 \cdot \ln x$

Lösungen

==

1. a) Bedingung: $2x+3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad D = [-\frac{3}{2}; \infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2x+3}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0$$

Also ist f in D streng monoton wachsend und daher umkehrbar.

b) Auflösen der Funktionsgleichung von f nach x:

$$y = \sqrt{2x+3} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2x+3 \quad \Rightarrow \quad 2x = y^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}$$

Variablentausch:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$$

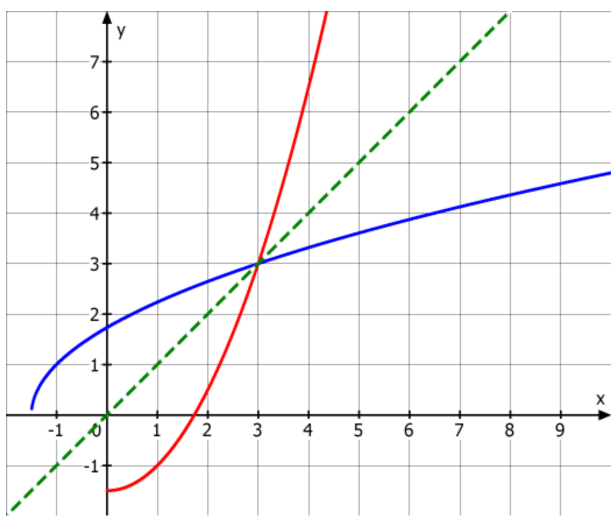
und damit $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

	f	f^{-1}
D	$[-1,5; \infty[$	$\mathbb{R}$
W	$\mathbb{R}$	$[-1,5; \infty[$

c) Der Schnittpunkt liegt auf der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten (gilt nicht allgemein).

Also $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Die Graphen von f und f^{-1} schneiden sich im Punkt $S(3 \mid 3)$.



d) $(f^{-1})'(x) = x \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(4) = 4$

Die Tangente an den Graphen von f^{-1} im Punkt $P'\left(4 \mid 6{,}5\right)$ hat die Steiging 4.

Also hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt P die Steigung $\frac{1}{4}$.

---

2. a) $D_{max} = \mathbb{R}$

sowie

$f'(x) = e^{1-2x} \cdot (-2) = -2 \cdot e^{1-2x} < 0$

und damit ist f streng monoton abnehmend und somit umkehrbar.

$y = e^{1-2x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln x$

	f	f^{-1}
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
W	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$

b) $D_{max} =]1; \infty[$

sowie

$f'(x) = \frac{2}{x-1} > 0$

und damit ist f streng monoton zunehmend und somit umkehrbar.

$y = 2 \cdot \ln(x-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{2} = \ln(x-1) \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{y}{2}} = x - 1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = 1 + e^{\frac{x}{2}}$

	f	f^{-1}
D	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
W	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$

c) $D_{max} = \mathbb{R}$

sowie

$$f'(x) = -2\cdot e^{-\frac{x}{3}}\cdot(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{x}{3}} > 0$$

und damit ist f streng monoton zunehmend und somit umkehrbar.

$$y = 1 - 2\cdot e^{-\frac{x}{3}} \quad\Rightarrow\quad 2\cdot e^{-\frac{x}{3}} = 1 - y \quad\Rightarrow\quad e^{-\frac{x}{3}} = \frac{1-y}{2} \quad\Rightarrow$$

$$-\frac{x}{3} = \ln\frac{1-y}{2} \quad\Rightarrow\quad x = -3\cdot\ln\frac{1-y}{2} \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x) = -3\cdot\ln(\frac{1-x}{2})$$

	f	f^{-1}
D	$\mathbb{R}$	$]-\infty; 1[$
W	$]-\infty; 1[$	$\mathbb{R}$

d) $D_{max} = \mathbb{R}^+$

sowie

$$f'(x) = -\frac{2}{x} < 0$$

und damit ist f streng monoton abnehmend und somit umkehrbar.

$$y = 3 - 2\cdot\ln x \quad\Rightarrow\quad 2\cdot\ln x = 3 - y \quad\Rightarrow\quad \ln x = \frac{3-y}{2} \quad\Rightarrow\quad x = e^{\frac{3}{2}-\frac{y}{2}} \quad\Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x}$$

	f	f^{-1}
D	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
W	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$