2 Ableitung

a) $f(x) = x - e^x \overset{\text{Summenregel}}{\Rightarrow} f'(x) = 1 - e^x$

b) $f(x) = e + e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 0 + e^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot e^x$

Die Eulersche Zahl e ist eine Konstante und e^{2x} muss mit der Kettenregel differenziert werden.

c) $f(x) = 3 \cdot \ln(\frac{1}{3} \cdot x) \overset{\text{Faktor– und Kettenrgegel}}{\Rightarrow} f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot x} \cdot \frac{1}{3}$

d) $f(x) = e^{-2x} \overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow} f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$

e) $f(x) = \ln(\frac{1}{2} \cdot x^2 + 1) \overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow} f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{\frac{1}{2} \cdot x^2 + 1}$

f) $f(x) = \ln(\frac{1}{x}) = \ln x^{-1} = -1 \cdot \ln x = -\ln x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x}$

oder umständlich mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot (x^{-1})' = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -x \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

---

3 Ableitung

a) $f'(x) = \frac{2}{|x|}$ b) $f'(x) = 2 \cdot \frac{\ln x}{x}$

---

4 Definitionsmenge und Ableitung

a) $f(x) = 2x \cdot e^x \overset{\text{Produktregel}}{\Rightarrow} f'(x) = 2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x$ und $D = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x \cdot \ln x \overset{\text{Produktregel}}{\Rightarrow} f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = 1 + \ln x$ und $D = \mathbb{R}^+$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \overset{\text{Produkt– und Kettenregl}}{\Rightarrow} (x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (2x - x^2) \cdot e^{-x}$ und $D = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$ und $D = \mathbb{R}^+$

oder wenn man will

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

e) $f(x) = \sqrt{x}\cdot\ln x \quad \overset{\text{Produktregel}}{\Rightarrow} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x + \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$ mit $D = \mathbb{R}^+$.

f) $f(x) = \frac{2x}{e^{-4x}} = 2x\cdot e^{4x} \quad \overset{\text{Produkt– und Kettenregel}}{\Rightarrow} \quad f'(x) = 2\cdot e^{4x} + 2x\cdot e^{4x}\cdot 4 = (2+8x)\cdot e^{4x}$

mit $D = \mathbb{R}$

oder nicht besonders schlau

$$f'(x) = \frac{2\cdot e^{-4x} - 2x\cdot e^{-4x}\cdot(-4)}{e^{-8x}} = \frac{(2+8x)\cdot e^{-4x}}{e^{-8x}} = (2+8x)\cdot e^{4x}$$

g) $f(x) = \ln\frac{x}{x-1} \quad \overset{\text{Ketten– und Quotentenregel}}{\Rightarrow} \quad f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x-1}}\cdot\frac{1\cdot(x-1) - x\cdot 1}{(x-1)^2} =$

$= \frac{x-1}{x}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x\cdot(x-1)}$

Vorzeichenbetrachtung des Arguments

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x}{x-1}$	$+$	$-$	$+$

und damit $D =]-\infty; 0] \cup]1; \infty[$

h) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+1} \quad \overset{\text{Quotienten– und Kettenregel}}{\Rightarrow} \quad f'(x) = \frac{2\cdot e^{2x}\cdot(x+1) - 1\cdot e^{2x}}{(x+1)^2} = \frac{(2x+1)\cdot e^{2x}}{(x+1)^2}$

und $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

---

5 Fehlersuche

a) $f() = e^{-x}\cdot\cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -e^{-x}\cdot\cos x + e^{-x}\cdot(-\sin x) = -e^{-x}\cdot(\cos x + \sin x)$

b) $f(x) = e^{-x}\cdot\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -e^{-x}\cdot\ln x + e^{-x}\cdot\frac{1}{x} = e^{-x}\cdot(\frac{1}{x} - \ln x)$

---

6 Verknüpfung

$f(x) = 3\cdot e^{2x}$ und $g(x) = x^2 + 1$

$h(x) := f\left[g(x)\right] = 3\cdot e^{2x^2+2} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 3\cdot e^{2x^2+2}\cdot 4x = 12x\cdot e^{2x^2+2}$

$k(x) := g\left[f(x)\right] = \left(3\cdot e^{2x+1}\right)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad k'(x) = 2\cdot 3\cdot e^{2x+1}\cdot 3e^{2x+1}\cdot 2 = 36\cdot e^{4x+2}$

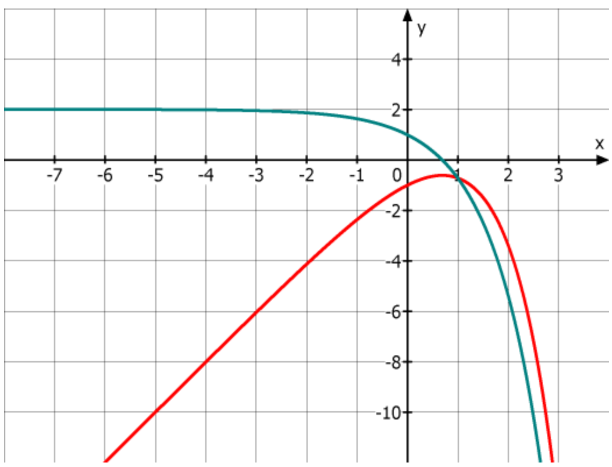
oder

$k(x) := g\left[f(x)\right] = \left(3\cdot e^{2x+1}\right)^2 + 1 = 9\cdot e^{4x+2} + 1 \quad \Rightarrow \quad k'(x) = 36\cdot e^{4x+2}$

---

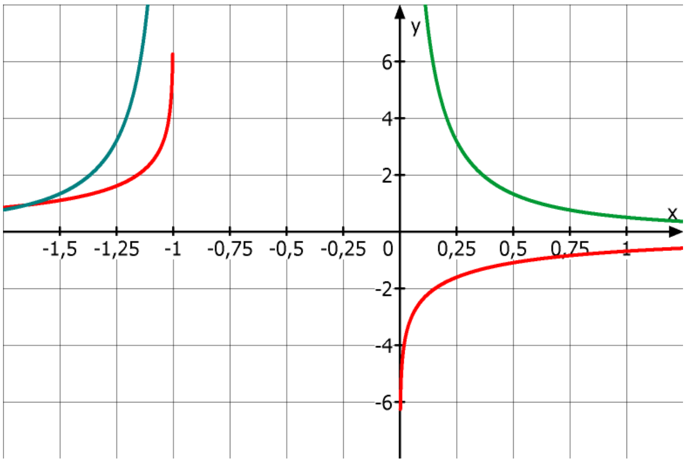
7 Ableitungsfunktion

a) $f(x) = 2x - \frac{1}{e^{-x}} = 2x + e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 + e^x$



- -

b) $f(x) = \ln\frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x\cdot(x+1)}$

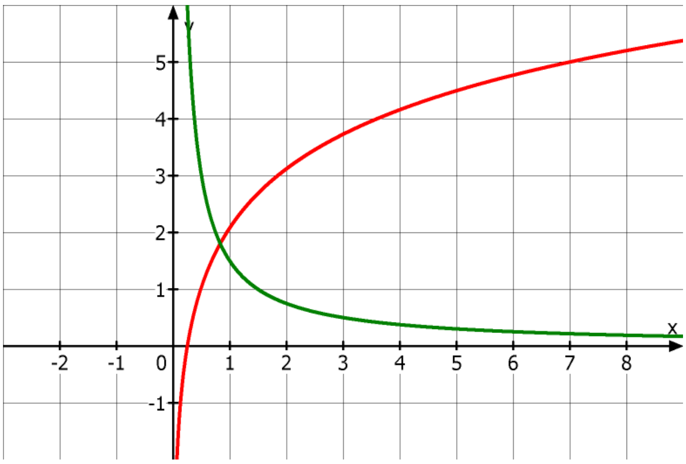


---

c) $f(x) = 3 \cdot \ln\sqrt{4x} \quad \Rightarrow \quad f\,'x) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{4x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x}} \cdot 4 = \frac{3}{2x}$

oder

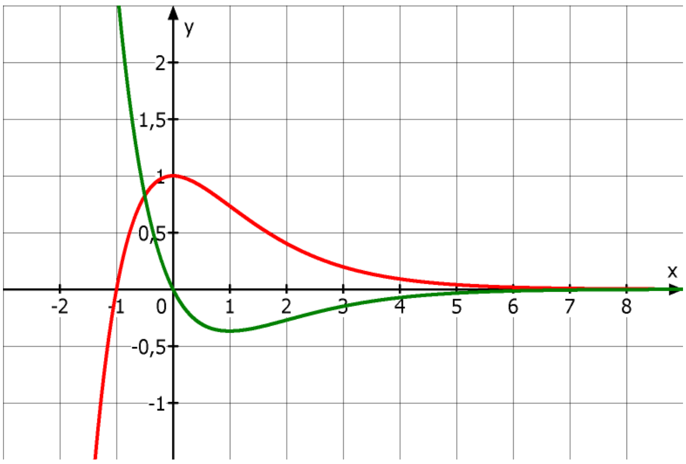
$f\,(x) = 3 \cdot \ln\sqrt{4x} = 3 \cdot \ln(2\sqrt{x}) = 3 \cdot \ln 2 + 3 \cdot \ln\sqrt{x} = 3 \cdot \ln 2 + \frac{3}{2} \cdot \ln x \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = \frac{3}{2x}$



---

d) $f(x) = e^{-x} + \frac{x}{e^x} = e^{-x} + x \cdot e^{-x} = (1+x) \cdot e^{-x} \quad \Rightarrow$

$f\,'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (1+x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -x \cdot e^{-x}$

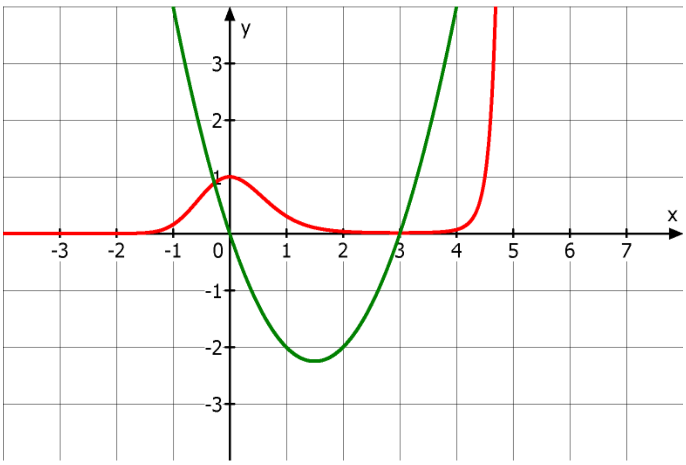


8 Verknüpfung

$f(x) = e^{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$

Die Funktion hat an der Stelle $x = 0$ einen Hoch-und an der Stelle $x = 3$ einen Tiefpunkt.

$v'(x) = x \cdot (x-3) = x^2 - 3x \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$

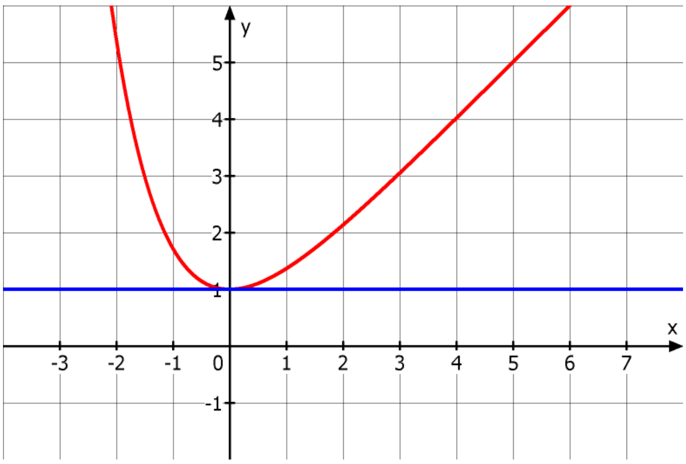


9 Waagrechte Tangenten

a) $f(x) = x + e^{-x}$

$f'(x) = 1 - e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

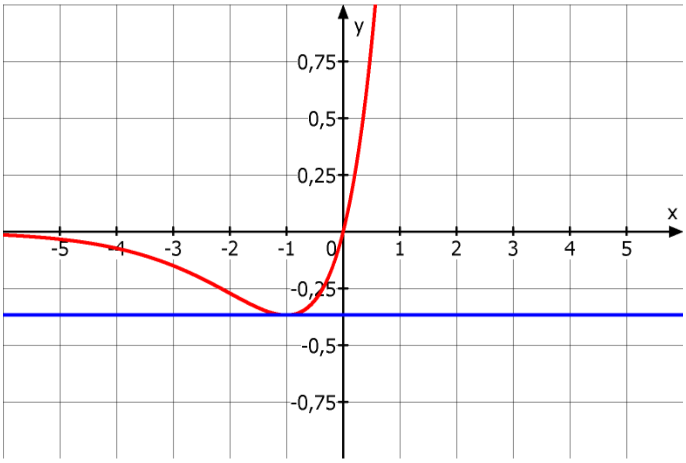
Der Graph von f besitzt im Punkt $P\left(0 \mid 1\right)$ eine waagrechte Tangente.



b) $f(x) = xe^x$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x) \cdot e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

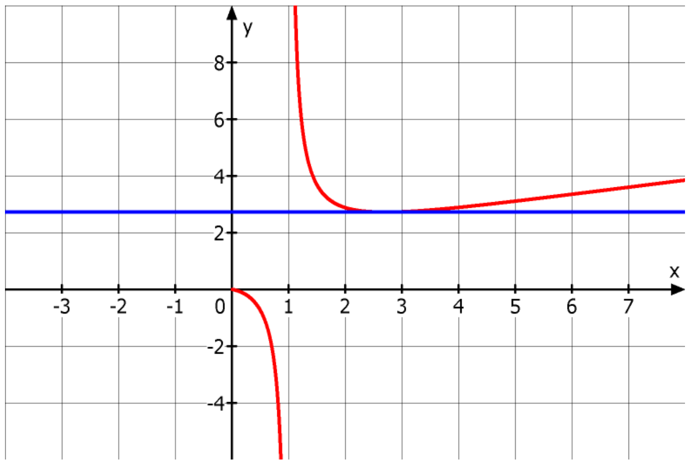
Der Graph von f besitzt im Punkt $P\left(-1 \mid -\frac{1}{e}\right)$ eine waagrechte Tangente.



c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{(\ln x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

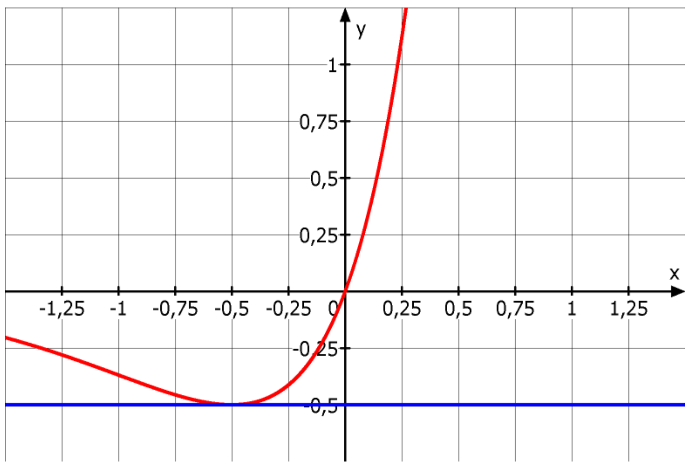
Der Graph von f besitzt im Punkt $P(e \mid e)$ eine waagrechte Tangente.



d) $f(x) = xe^{2x+1}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x+1} + x \cdot e^{2x+1} \cdot 2 = (1+2x) \cdot e^{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Der Graph von f besitzt im Punkt $P\left(-0{,}5 \mid -0{,}5\right)$ eine waagrechte Tangente.



---

11 Zuordnung

F	f	f '
blau	schwarz	grün

Begründung: Lage der Extremstellen

---

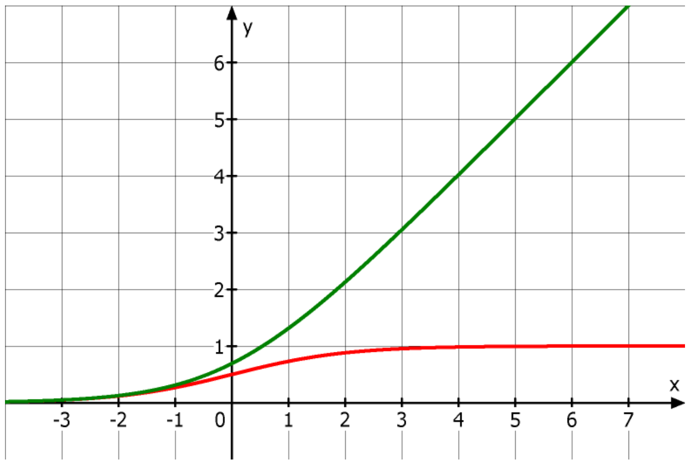
12 Exponentialfunktion

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $F(x) = \ln(e^x + 1) \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = f(x)$

c)



---

13 Tangenten

$f(x) = e^{-x^2-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2+1}$

$y = -2x_0 \cdot e^{-x_0{}^2+1} \cdot (x - x_0) + e^{-x_0{}^2+1}$

Tangente im Punkt $P_1\left(-3 \mid f(-3)\right)$: $y = 6 \cdot e^{-8} \cdot x + 19 \cdot e^{-8}$

Tangente im Punkt $P_2\left(3 \mid f(3)\right)$: $y = -6 \cdot e^{-8} \cdot x + 19 \cdot e^{-8}$

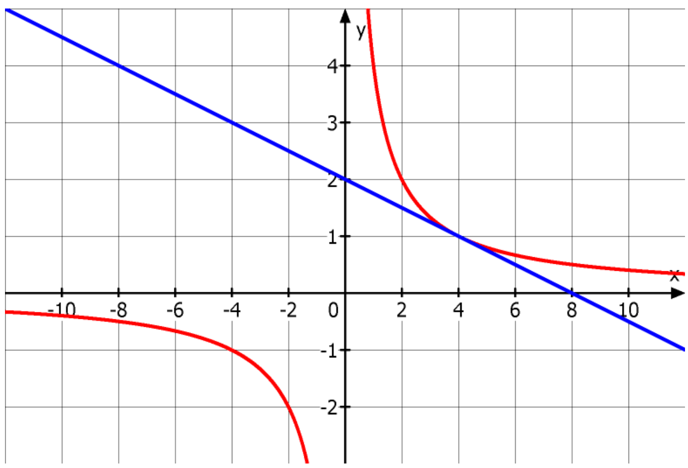
Schnittpunkt: $S\left(0 \mid 19 \cdot e^{-8}\right)$

G 14

Schnittpunktsbedingung: $\frac{4}{x} = mx + 2 \quad \Rightarrow \quad mx^2 + 2x - 4 = 0$

Bedingung für nur eine Lösung: $D = 4 + 16m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{4}$

Lösung: $x = 4$ und damit ergibt sich $B\left(4 \mid 1\right)$



y
4
3
2
1
-1
-2
x
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10