8 Kreise und Kugeln im Koordinatensystem

===

2 Gleichungen von Kreisen und Kugeln in Vektor- und Koordinatendarstellung

a) $\left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 3^2 \iff (x_1-5)^2 + (x_2-2)^2 = 9 \iff x_1{}^2 + x_2{}^2 - 10x_1 - 4x_2 + 20 = 0$

b) $\vec{X}^2 = 2^2 \iff x_1{}^2 + x_2{}^2 = 4$

c) $\left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^2 = 1{,}5^2 \iff (x_1-2)^2 + (x_2-3)^2 + (x_3+1)^2 = 2{,}25$

$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 11{,}75 = 0$

d) $\vec{X}^2 = 4^2 \iff x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 16$

e) $\left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 5^2 \iff (x_1+2)^2 + (x_2+3)^2 = 25 \iff x_1{}^2 + x_2{}^2 = 12$

f) $\left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 3^2 \iff (x_1-2)^2 + (x_2+2)^2 + (x_1-1)^2 = 9$

$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$

---

3 Lage von Punkten relativ zu einer Kugel

a) Gegeben : $A\left(4 \mid 1 \mid 3\right)$, $B\left(3 \mid 0 \mid 10\right)$, $C\left(-1 \mid 1 \mid 1\right)$ und $M\left(1 \mid 1 \mid 7\right)$ sowie $r = 5$

$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{MA} = 5 = r$ d. h. A liegt auf der Kugel.

$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{MB} = \sqrt{14} < r$ d. h. B liegt im Innern der Kugel.

$$\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{Mc} = \sqrt{40} > r \text{ d. h. C liegt außerhalb der Kugel.}$$

---

b) Gegeben : $A(8 \mid 1 \mid 2)$, $B(7 \mid -3 \mid 5)$, $C(-1 \mid -5 \mid -1)$ und $M(-2 \mid -2 \mid 3)$ sowie $r = 8$

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{MA} = \sqrt{110} > r \text{ d. h. A liegt außerhalb der Kugel.}$$

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{MB} = \sqrt{86} > r \text{ d. h. B liegt außerhalb der Kugel.}$$

$$\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{MC} = \sqrt{26} < r \text{ d. h. C liegt im Innern der Kugel.}$$

---

4. Parametrisierte Punkte

a) $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ c-1 \end{pmatrix}$ ergibt $1 + 49 + (c-1)^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad c = 1$

Für $c = 1$ liegt der Punkt P auf der Kugel, ansonsten immer außerhalb.

b) $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ c+3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt $(c+3)^2 + 25 = 50 \quad \Rightarrow \quad c = -8 \lor c = 2$

$-\infty < c < -8$	$c = -8$	$-8 < c < 2$	$c = 2$	$2 < c < \infty$
außerhalb	auf	innerhalb	auf	außerhalb

c) $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} c-2 \\ c+3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt $(c-2)^2 + (c-3)^2 + 25 = 50 \quad \Rightarrow \quad c = -1 \lor c = 6$

$-\infty < c < -1$	$c = -1$	$-1 < c < 6$	$c = 6$	$6 < c < \infty$
außerhalb	auf	innerhalb	auf	außerhalb

5 Kreise

Es gilt $m_1 = m_2 = m$

a) $m^2 + m^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad m = -4 \vee m = 4$

$(x_1 + 4)^2 + (x_2 + 4)^2 = 32$ und $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 32$

b) $(-7 - m)^2 + (1 - m)^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad m = -3$

$(x_1 + 3)^2 + (x_2 + 3)^2 = 32$

---

6 Kreisgleichung

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 100$$

---

7 Deutung

Kreis in der x_1x_2-Koordinatenebene mit dem Mittelpunkt $M\left(5 \mid 3\right)$ und dem Radius $r = 6$.

Kugel mit dem Mittelpunkt $M\left(5 \mid 3 \mid 0\right)$ und dem Radius $r = 6$.

Der Kreis ist der Schnittkris der Kugel mit der x_1x_2-Koordinatenebene.

---

8 Berührung

a) Es ist $m_1 = m_2 = m$

$(1 - m)^2 + (2 - m)^2 = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 6m + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1 \vee m = 5$

$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ und $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 = 25$

b) Mittels einer Zeichnung ergibt sich als Mittelpunkt $M\left(-1 \mid 2\right)$ und $r = 2$-

Rechnerische Lösung :

Es ist $r = m_2 > 0$

$(1-m_1)^2 + (2-m_2)^2 = m_2^2$ und $(-3-m_1)^2 + (2-m_2)^2 = m_2^2$

Durch Subraktion beider Gleichungen ergibt sich $m_1 = -1$.

Damit ergibt sich $m_2 = 2$.

---

9 Abstand zweier Kugeln

Gegeben : $M_1\left(-7 \mid 1 \mid 3\right)$ und $M_2\left(5 \mid 5 \mid 9\right)$ sowie $r_1 = 7$ bzw. $r_2 = 3$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{M_1M_2} = \sqrt{12^2 + 4^2 + 6^2} = 14 \Rightarrow d(K_1; K_2) = 14 - 7 - 3 = 4$$

---

10 Berührung im Ursprung

$(x_1 - 5)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5^2$ bzw. $(x_1 + 5)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5^2$

$x_1^2 + (x_2 - 5)^2 + x_3^2 = 5^2$ bzw. $x_1^2 + (x_2 + 5)^2 + x_3^2 = 5^2$

$x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 5)^2 = 5^2$ bzw. $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 5)^2 = 5^2$

---

11 Berührung

Es ist $m_2 = m_3 = 13$

$(5 - m_1)^2 + (1 - 13)^2 + (9 - 13)^2 = 13^2 \Rightarrow m_1 = 2$

---

12 Durchmesser

a) Gegeben : $P\left(5 \mid -2 \mid 12\right)$ und $Q\left(3 \mid 6 \mid -4\right)$

$$M(4\,|\,2\,|\,4) \text{ und } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{PQ} = 18 \text{ ergibt } \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right]^2 = 9^2$$

---

b) Gegeben : $P(4\,|\,-2\,|\,5)$ und $Q(-8\,|\,2\,|\,1)$

$$M(-2\,|\,0\,|\,2) \text{ und } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{PQ} = 14 \text{ ergibt } \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 7^2$$

---

13 Zylinder

Die Gleichung beschreibt einen um die x_3-Achse zentrierten Zylinder mit Radius $r = 10$.

---

14 Einbeschriebener Kreis

$$M(-2{,}5\,|\,2{,}5\,|\,2{,}5) \text{ und } r = 2{,}5\sqrt{3} \text{ ergibt die Gleichung } \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \right]^2 = \frac{15}{4}.$$

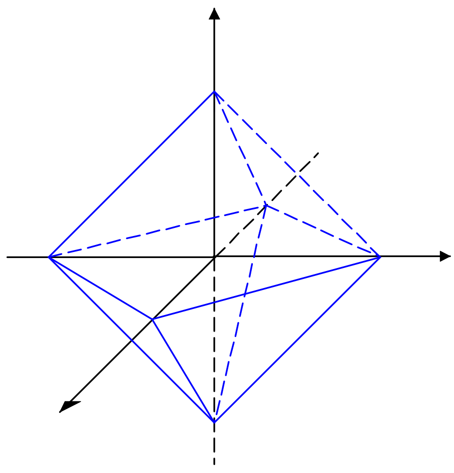
---

15 Brennende Kerze

---

16 Oktaeder

a)



b) $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 4 = 85\frac{1}{3}$

$h_F = \frac{4\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

$O = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 64\sqrt{3}$

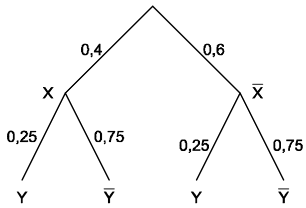
c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4^2$

G 17 Vierfeldertafel

a)

	X	$\overline{X}$	
Y	0,1	0,15	0,25
$\overline{Y}$	0,3	0,45	0,75
	0,4	0,6	1

b)



c) $P_X(Y) = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$ und $P_{\overline{X}}(Y) = \frac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25$

$P_Y(X) = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4$ und $P_{\overline{Y}}(X) = \frac{0{,}15}{0{,}25} = 0{,}6$

G 18

a) falsch b) falsch c) wahr d) wahr e) falsch

G 19

$\beta = \frac{180° - 30°}{3} = 50°$

$\varepsilon = 180° - 50° = 130°$

$\delta = 50°$
