6 Skalarprodukt von Vektoren und die Größe von Winkeln

===

2 Skalarprodukt berechnen

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -4$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = 12$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2 = -2$

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

0

3 Skalarprodukte

Gegeben : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ b) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 5$

c) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 3 + 5 = 8$

e) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 3 - 5 = -2$

f) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b}^{\,2} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 3 - 5 + 14 - 0 = 12$

---

4 Winkel

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Damit $a = \sqrt{13}$ und $b = \sqrt{74}$ sowie $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$

Also $\cos\varphi = \dfrac{-11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{74}} \quad\Rightarrow\quad \varphi \approx 110{,}8°$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$

Damit $a = \sqrt{11}$ und $b = \sqrt{34}$ sowie $\vec{a}\cdot\vec{b} = 8$

Also $\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{34}} \quad\Rightarrow\quad \varphi \approx 65{,}6°$

---

5 Regelmäßiges Sechseck

$\vec{a}\cdot\vec{d} = -2,\ \vec{a}\cdot\vec{g} = 4,\ \vec{d}\cdot\vec{g} = = 4,\ \vec{e}\cdot\vec{g} = 8$ und $\vec{b}\cdot\vec{e} = 4$

---

6 Seiten und Winkel eines Dreiecks

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ sowie $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

$\overline{AB} = \sqrt{13}$ und $\overline{BC} = \sqrt{17}$ sowie $\overline{CA} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2 \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 78{,}7°$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} = 11 \quad\Rightarrow\quad \cos\beta = \dfrac{11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} \quad\Rightarrow\quad \beta \approx 42{,}3°$

Winkelsumme : $\gamma = 180° - \alpha - \beta \quad\Rightarrow\quad \gamma \approx 59°$

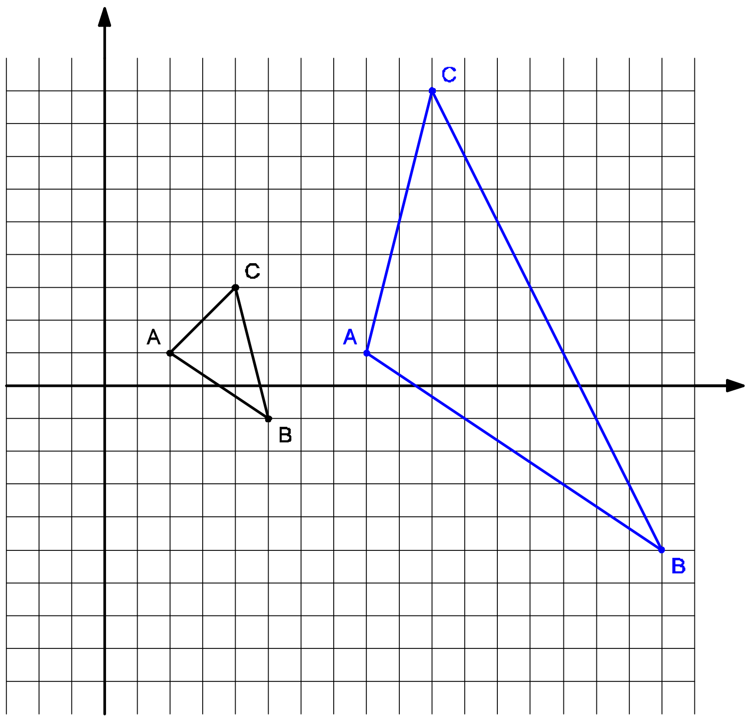
b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-7\\14\end{pmatrix}$ sowie $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$

$\overline{AB} = 3\sqrt{13}$ und $\overline{BC} = 7\sqrt{5}$ sowie $\overline{CA} = 2\sqrt{217}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix} = -30 \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \dfrac{-30}{3\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{17}} = \dfrac{-5}{\sqrt{221}} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 109{,}7°$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} = 147 \quad\Rightarrow\quad \cos\beta = \frac{147}{3\sqrt{13}\cdot 7\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{65}} \quad\Rightarrow\quad \beta \approx 29{,}7°$$

$$\text{Winkelsumme}: \gamma = 180° - \alpha - \beta \quad\Rightarrow\quad \gamma \approx 40{,}6°$$



b) $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ sowie } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AB} = 3 \text{ und } \overline{BC} = 26 \text{ sowie } \overline{CA} = 3$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4 \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{-4}{3\cdot 3} = -\frac{4}{9} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 116{,}4°$$

$$\text{Winkelsumme}: \beta = \gamma = \frac{180° - \alpha}{2} \quad\Rightarrow\quad \beta = \gamma \approx 31{,}8°$$

---

7 Prüfung auf Orthogonalität

$\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{d}$

---

8 Herstellen von Orthogonalität

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4k \\ 3k \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-2k \\ k \end{pmatrix}$

---

9 Nullprodukte

a) $a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \vee b = 0$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} = \vec{o} \vee \vec{b} = \vec{o} \vee \vec{a} \perp \vec{b}$

---

10 Würfel

a) Dreieck ABC

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

und damit

$\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ und $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ sowie $\overline{BC} = 4\sqrt{2}$

$\cos\beta = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 78{,}5°$ und damit $\alpha = \gamma \approx 50{,}8°$

b) Dreieck EDF

$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overline{DE} = 2\sqrt{5}$ und $\overline{DF} = 2\sqrt{2}$ und damit $\overline{FE} = 2\sqrt{5}$

$\cos\varepsilon = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 36{,}9° \quad \Rightarrow \quad \delta = \varphi \approx 71{,}6°$

---

11 Orthogonaler Vektor

a) $\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
