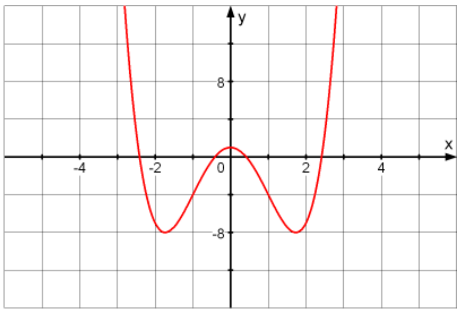
3 Bedingungen für Extrema

==

2 Bestimmung von kritischen Stellen

a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x \cdot (x^2 - 3)$

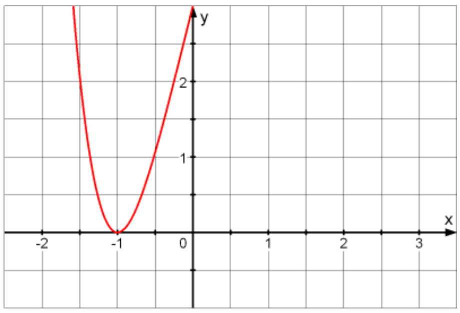
Kritische Stellen: $f'(x) = 4x \cdot (x^2 - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}$



---

b) $f(x) = x^4 + 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 + 4 = 4 \cdot (x^3 + 1)$

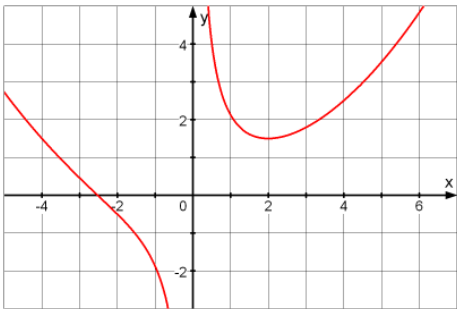
Kritische Stellen: $f'(x) = 4 \cdot (x^3 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$



---

c) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{2}{x^2}$

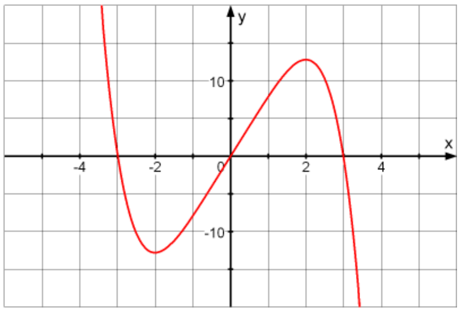
Kritische Stellen: $f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{2}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$



---

d) $f(x) = -\frac{1}{10}x^5 + 8x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 8$

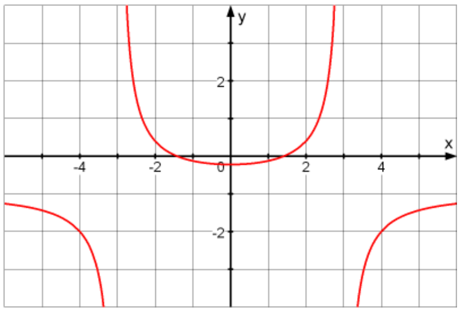
Kritische Stelen: $f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 2$



---

e) $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-9} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-2x\cdot(x^2-9) - (2-x^2)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{14x}{(x^2-9)^2}$

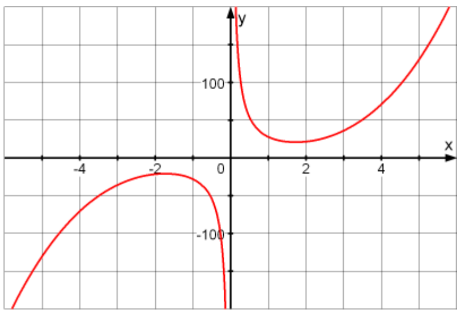
Kritische Stellen: $f'(x) = \frac{14x}{(x^2-9)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$



---

f) $f(x) = x^3 + \frac{27}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - \frac{27}{x^2}$

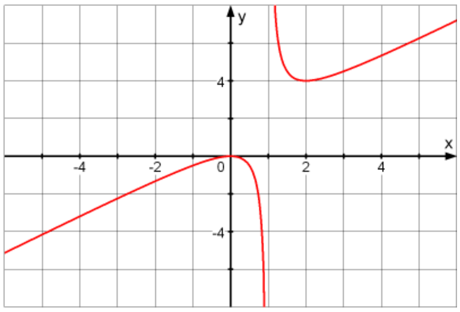
Kritische Stellen: $f'(x) = 3x^2 - \frac{27}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^4 - 27 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$



---

g) $f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

Kritische Stellen: $f'(x) = \frac{x\cdot(x-2)}{x^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$

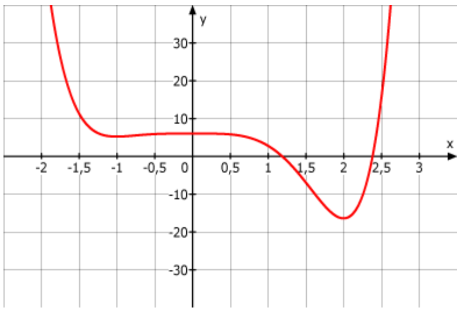


---

h) $f(x) = x^6 - \frac{6}{5}x^5 - 3x^4 + 6 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^5 - 6x^4 - 12x^3$

Kritische Stellen: $f'(x) = 6x^5 - 6x^4 - 12x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^3 \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 0 \vee x = 2$



---

3 Graph der Ableitung

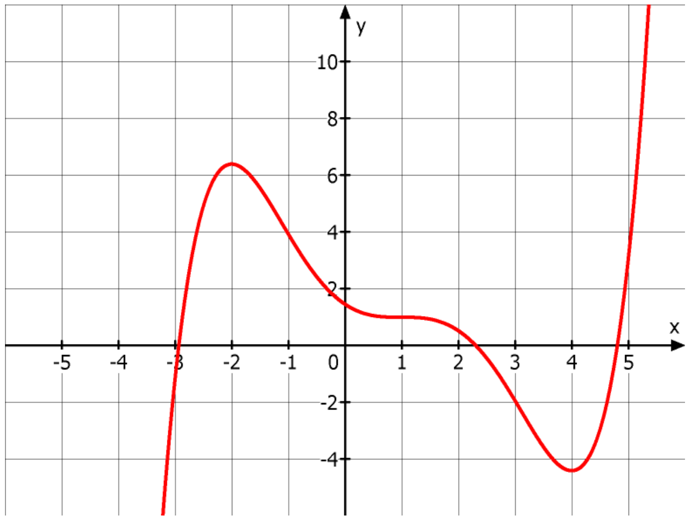
Sind $x_1 < x_2 < x_3$ die Nullstellen der Ableitungsfunktion, dann gilt

$]-\infty; x_1]$: f ist sms

$[x_1; x_3]$: f ist smf

$[x_3; \infty[$: f ist sms

Extremstellen sind x_1 und x_3.



---

4 Lokale und globale Extrema

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x = 0$

Kritische Stellen:

$f'(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x\cdot(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = 2 \vee x = 0$

Monotonieuntersuchung:

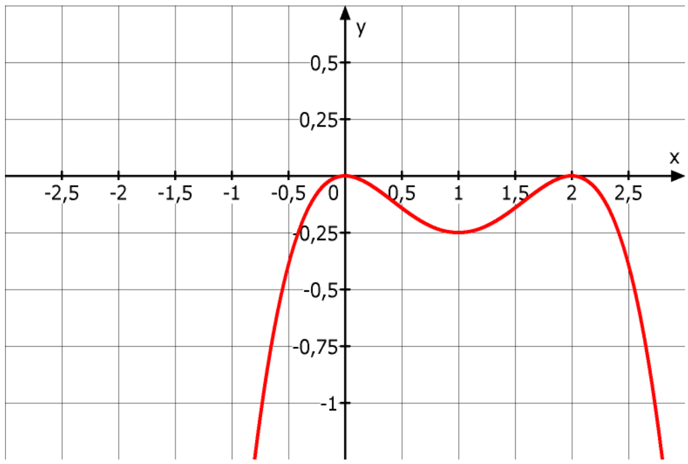
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$-x$	$+$	$-$	$-$	$-$
$x^2 - 3x + 2$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f'()$	$+$	$-$	$+$	$-$

$f(0) = 0$ und $f(1) = -\frac{1}{4}$ sowie $f(2) = 0$

$H_1\left(0 \mid 0\right)$ und $H_2\left(2 \mid 0\right)$ sind Hochpunkte.

$T\left(1 \mid -\frac{1}{4}\right)$ ist ein Tiefpunkt.

Aus dem Monotonie- und Grenzwertverhalten von f folgt, dass 0 ein globales Maximum und $-\frac{1}{4}$ ein lokales Minimum von f ist.



b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$

Kritische Stellen:

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x\cdot(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$

Monotonieuntersuchung:

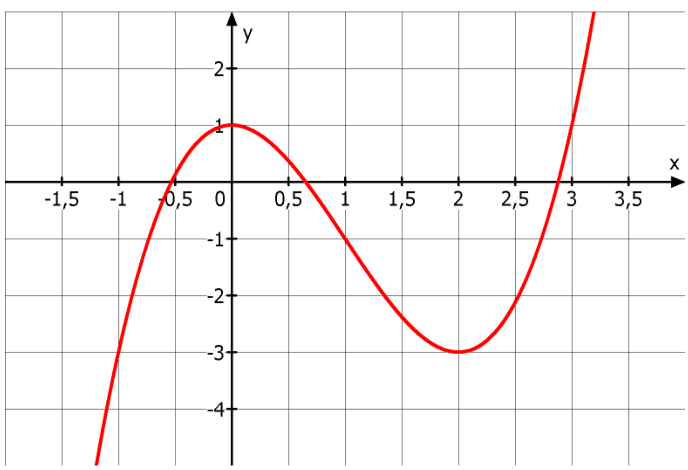
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f'()$	$+$	$-$	$+$

$f(0) = 1$ und $f(2) = -3$

$H\left(0 \mid 1\right)$ ist ein Hochpunkt.

$T\left(2 \mid -3\right)$ ist ein Tiefpunkt.

Aus dem Montonie- und Grenzwertverhalten von f folgt, dass 1 ein lokales Maximum und -3 ein lokales Minimum von f ist.



---

c) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3-1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

Kritische Stellen:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3+1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

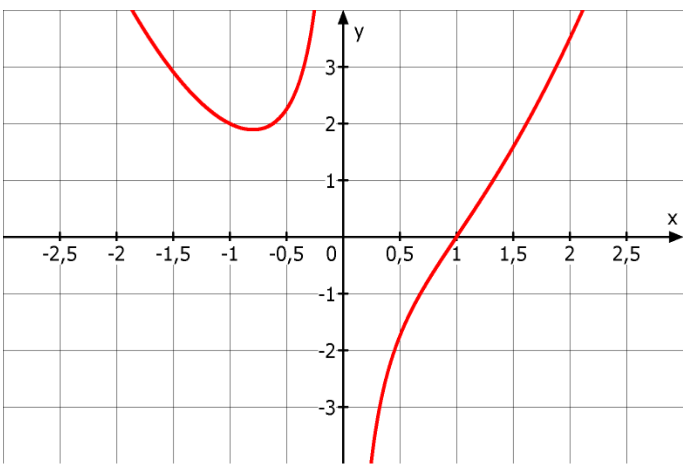
Monotonieverhalten:

	$-\infty < x < -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < x < 0$	$0 < x < \infty$
$2x^3+1$	$-$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$

$$f(\sqrt[3]{0{,}5}) = \frac{(-\sqrt[3]{0{,}5})^3 - 1}{-\sqrt[3]{0{,}5}} = \frac{-1{,}5}{-\sqrt[3]{0{,}5}} = 3\sqrt[3]{0{,}25}$$

$T\left(-\sqrt[3]{0{,}5} \mid 3\sqrt[3]{0{,}25}\right)$ ist ein Tiefpunkt des Graphen von f.

Aus dem Monotonie- und Grenzwertverhalten von f folgt, dass $3\sqrt[3]{0{,}25}$ ein relatives Minimum von f ist.



---

d) $f(x) = \frac{8}{4-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{0\cdot(4-x^2) - 8\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{16x}{(4-x^2)^2}$

Kritische Stellen:

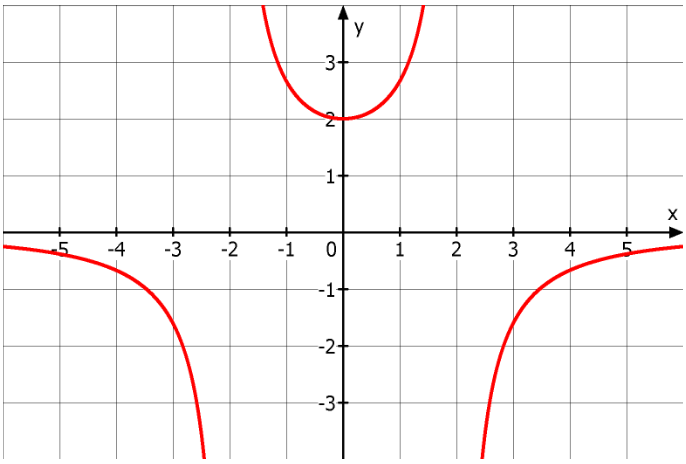
$$f'(x) = \frac{16x}{(4-x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Monotonieverhalten:

	$-\infty < x - 2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$16x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(4-x^2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

$f(0) = 2$ und damit ist $T\left(0 \mid 2\right)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f.

Aus dem Monotonie- und Grenzwertverhalten von f folgt, dass 2 ein lokales Minimum von f ist.



---

e) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Kritische Stellen:

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x\cdot(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = -1 \lor x = 2$$

Monotonieverhalten:

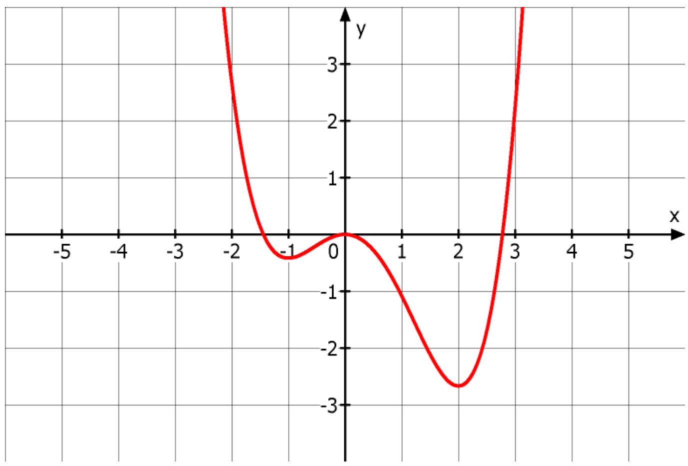
	$-\infty < x - 1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - x - 2$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$f(-1) = -\frac{5}{12}$ und $f(0) = 0$ sowie $f(2) = -\frac{8}{3}$

$T_1\left(-1 \mid -\frac{5}{12}\right)$ und $T_2\left(2 \mid -\frac{8}{3}\right)$ sind Tiefpunkte und

$H\left(0 \mid 0\right)$ ist ein Hochpunkt des Graphen von f.

Aus dem Monotonie- und Grenzwertverhalten von f folgt, dass $-\frac{8}{3}$ ein globales Minimum, $-\frac{5}{12}$ ein lokales Minimum sowie 0 ein lokales Maximum von f ist.



---

f) $f(x) = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 4x$

Kritische Stellen:

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\cdot(x^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$

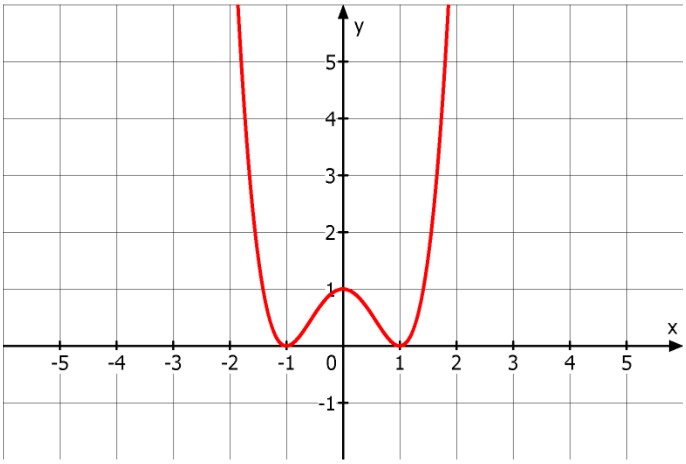
Monotonieverhalten:

	$-\infty < x - 1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$4x$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$f(-1) = f(1) = 0$ und $f(1) = 1$

$T_1\left(-1 \mid 0\right)$ und $T_2\left(1 \mid 0\right)$ sind Tiefpunkte und $H\left(0 \mid 1\right)$ ist Hochpunkt des Graphen von f.

Aus dem Monotonie- und Grenzwertverhalten von f folgt, dass 0 ein globales Minimum und 1 ein lokales Maximum von f ist.



---

g) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+2) - (x^2-4)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{12x}{(x^2+2)^2}$

Kritische Stellen:

$$f'(x) = \frac{12x}{(x^2+2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

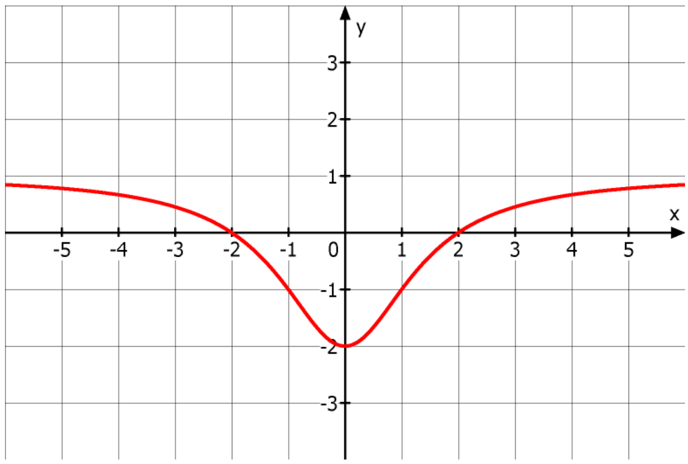
Monotonieverhalten:

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$12x$	$-$	$+$
$(x^2+2)^2$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$

$f(0) = -2$

$T\left(0 \mid -2\right)$ ist ein Tiefpunkt des des Graphen von .

Aus dem Monotonie- und Grenzwertverhalten von f folgt, dass -2 globales Minimum von f ist.



---

h) $f(x) = \frac{(1-x)^2}{2-x} = \frac{1-2x+x^2}{2-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(-2+2x)\cdot(2-x)-(1-2x+x^2)\cdot(-1)}{(2-x)^2} =$

$$= \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2}$$

Kritische Stellen:

$$f'(x) = \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2+4x-3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = 3$$

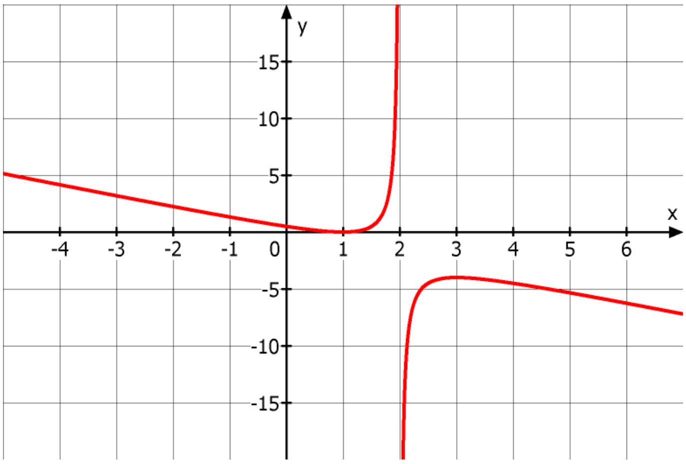
Monotonieverhalten:

	$\infty < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$-x^2+4x-3$	$-$	$+$	$+$	$-$
$(2-x)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$

$f(1) = 0$ und $f(3) = -3$

$H\left(3 \mid -3\right)$ ist ein Hochpunkt und $T\left(1 \mid 0\right)$ ist ein Tiefpunkt des Graphen von f.

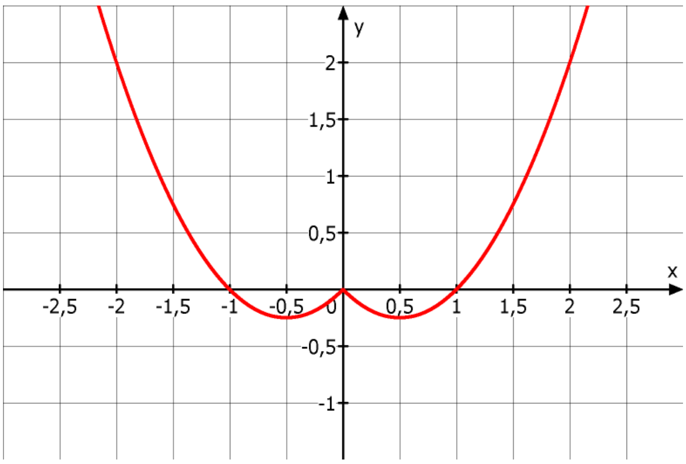
Aus dem Monotonie- und Grenzwertverhalten von f folgt, dass -3 ein lokales Maximum und 0 ein lokales Minimum von f ist.



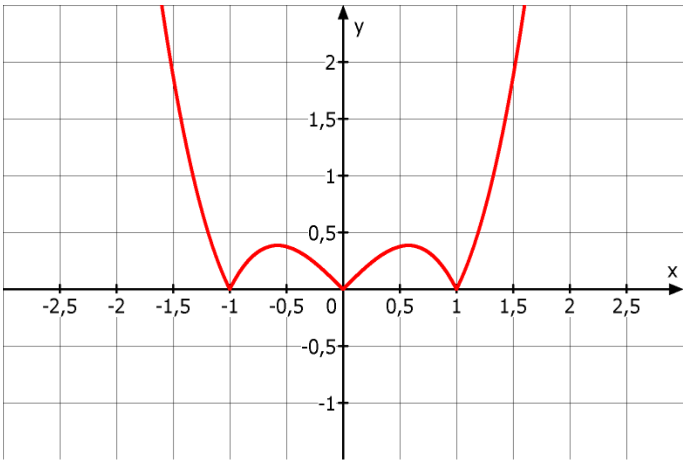
---

5 Extrema an Nichtdifferenzierbarkeitsstellen

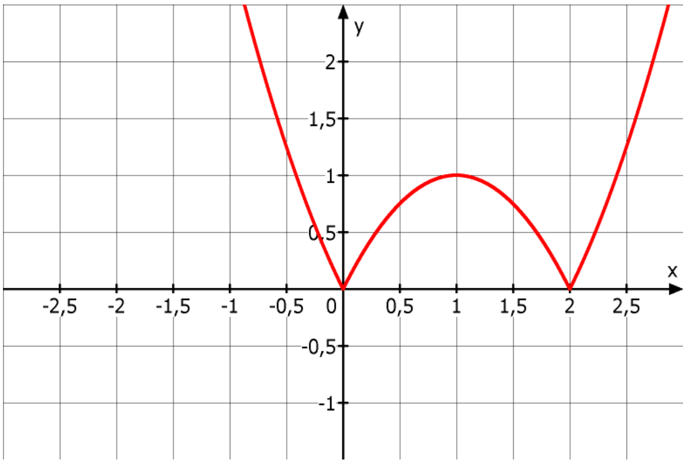
a)3



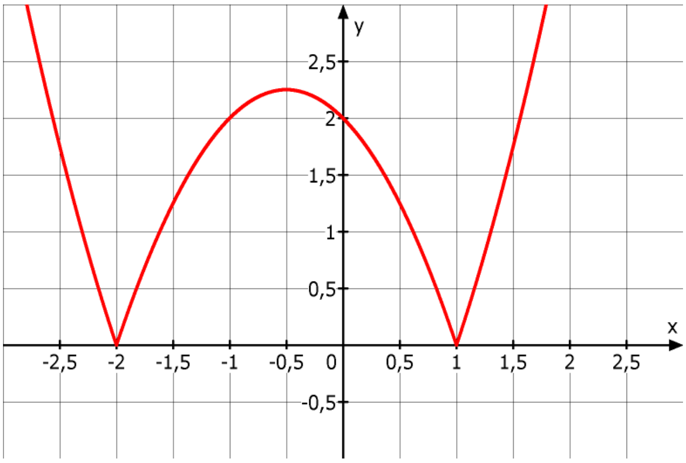
b)



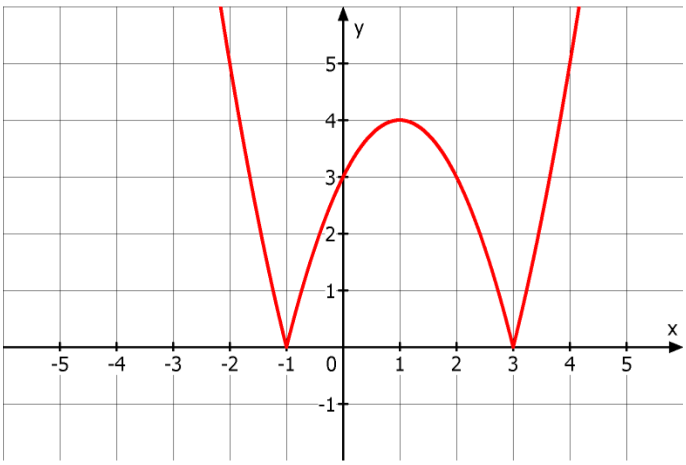
c)


y
2
1,5
1
0,5
x
-2,5
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
-0,5
-1

d)


y
2,5
2
1,5
1
0,5
x
-2,5
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
-0,5

e)


y
5
4
3
2
1
x
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
-1

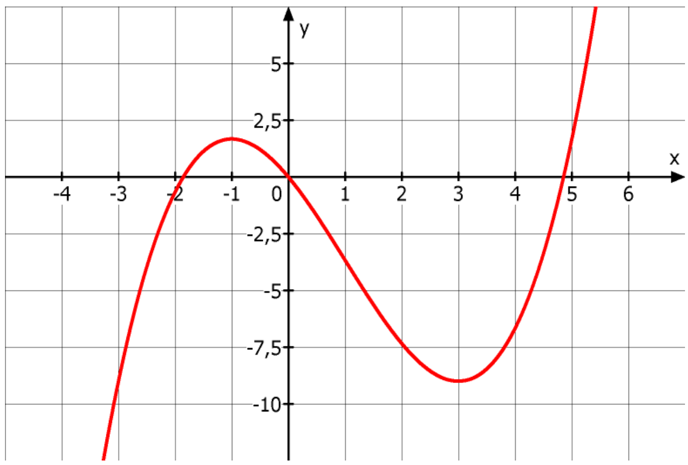
f)

---

6 Funktionsterme

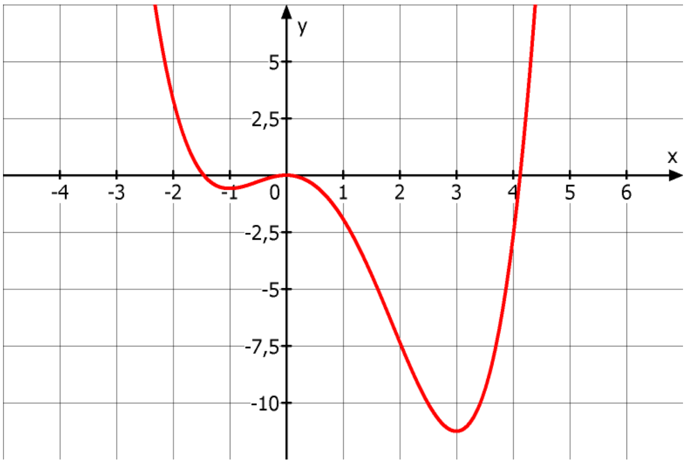
a) $f'(x) = (x+1)\cdot(x-3) = x^2 - 2x - 3$

Möglicher Funktionsterm : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$



d) $f'(x) = x\cdot(x+1)\cdot(x-3) = x^3 - 2x^2 - 3x$

Möglicher Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

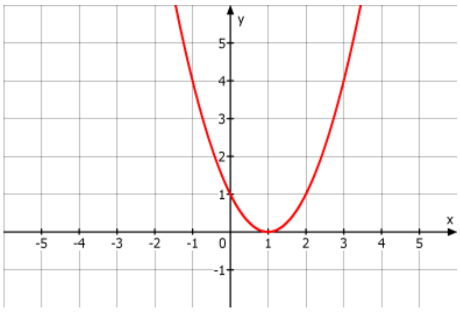


c) Nachbargeschwätz

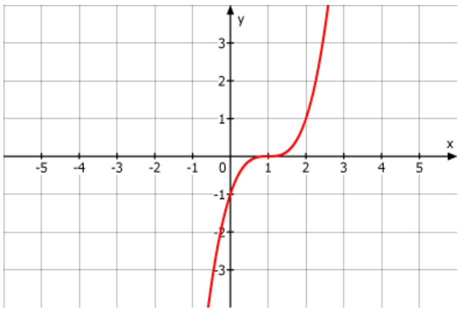
---

7 Funktionen mit bestimmten Eigenschaften

a) $f: x \to (x-1)^2$, $D = \mathbb{R}$

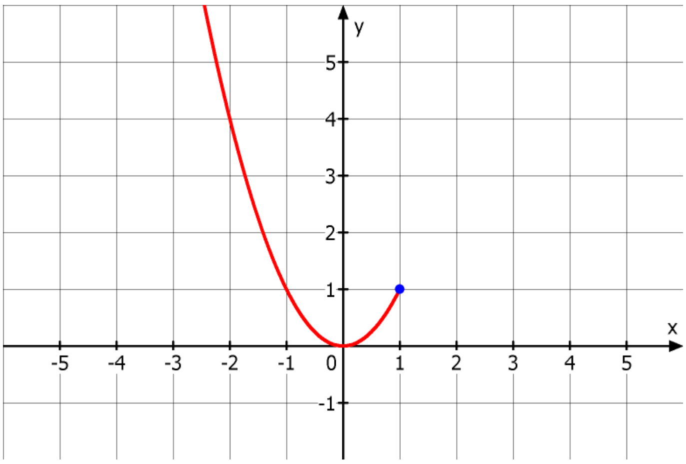


b) $f: x \to (x-1)^3$, $D = \mathbb{R}$



c) $f: x \to x^2$,

$D =]-\infty; 1]$



---

8 Zuordnung von Graphen

Der Graph der Ableitungsfunktion der Funktion g ist der Graph G_2.

Begründung: Monotonieverhalten von f.

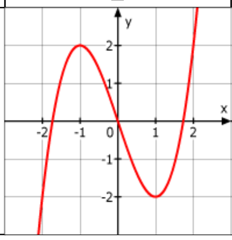
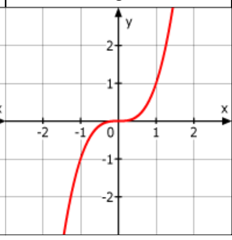
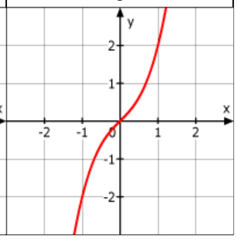
Der Graph der Ableitungsfunktion der Funktion f ist der Graph G_4.

Begründung: Monotonieverhalten und Extremstellen von f.

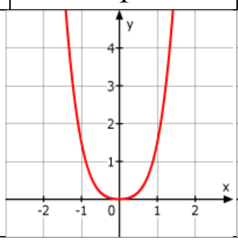
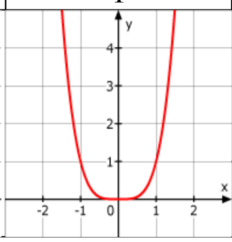
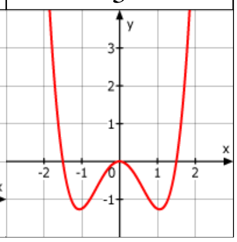
---

9 Funktionenscharen

a) $f(x) = x^3 - ax \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - a$

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Anzahl der Extrema	2	0	0
			

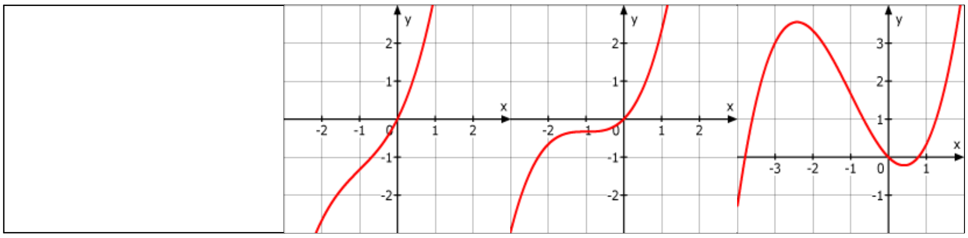
b) $f(x) = x^4 + ax^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 + 2ax$

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Anzahl der Extrema	1	1	3
			

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^2 + 2x + a$

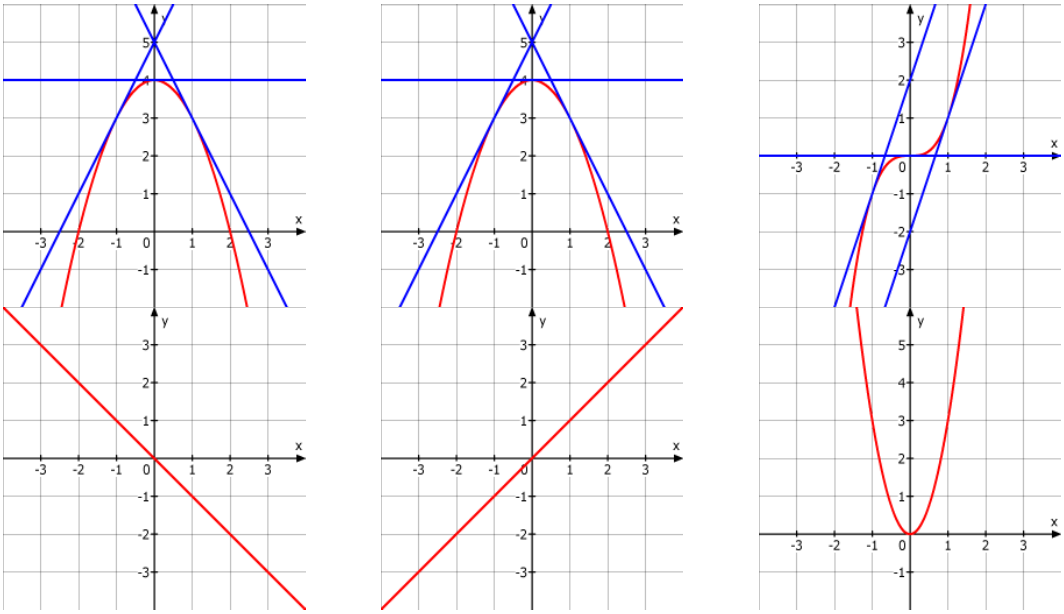
Die Gleichung $x^2 + 2x + a = 0$ hat die Diskriminante $D = 4 - 4a$

	$a > 1$	$a = 1$	$a < 1$
Anzahl der Extrema	0	0	0



10 Kritische Punkte

a) und b)



$f: x \rightarrow 4 - x^2$ $\quad$ $f: \; x \rightarrow x^2$ $\quad$ $f: x \rightarrow x^3$

c) Moderne Kommunikation

G 11 Würfel

$$P(I) \; = \; \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 16{,}15\%$$