III Anwendungen der Ableitung

==

1 Monotonie

---

2 Praktische Beispiele

a) Die Kosten eines Telefongesprächs nehmen monoton mit der Dauer des Gesprächs zu.

b) Der Tankinhalt eines Autos nimmt während der Fahrt streng monoton mit der Fahrtdauer ab.

c) Die Geschwindigkeit eines Körpers beim freien Fall nimmt streng monoton mit der Fallzeit zu.

d) Die Höhe eines Grashalms nimmt monoton mit der Wachstumsdauer zu.

---

3 Monotonieintervalle

a)

Intervall	**Art der Monotonie**
$[-1; 2]$	streng monoton wachsend
$[2; 4]$	streng monoton fallend

b)

Intervall	**Art der Monotonie**
$[0; 1]$	streng monoton fallend
$[1; 2]$	streng monoton wachsend
$[2; \infty[$	streng monoton fallend

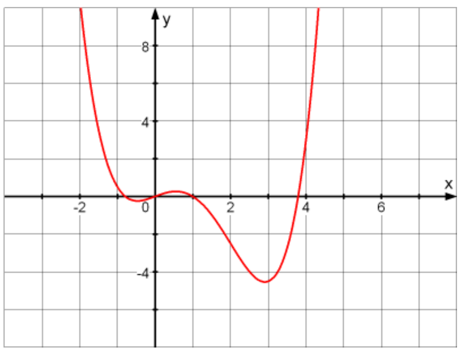
c)

Intervall	**Art der Monotonie**
$]-\infty; 2[$	streng monoton fallend
$[2; 5]$	streng monoton fallend

---

4 Verlauf von Graphen

a)



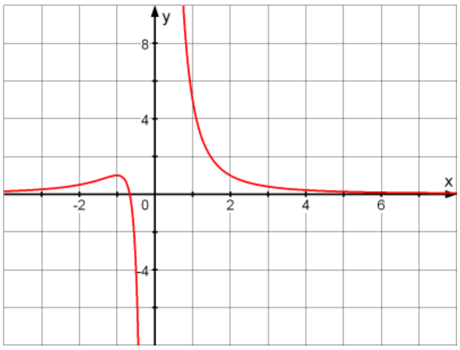
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{4}x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{3}{4}$$

Die Nullstellen der Ableitung lassen sich nur näherungsweise bestimmen. Sie seien daher mit x_1, x_2 und x_3 bezeichnet.

	$-\infty < x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < \infty$
f '(x)	–	+	–	+
	smf	sms	smf	sms

---

b)



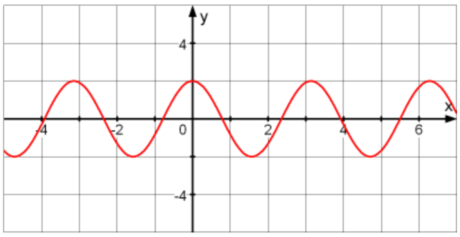
$$f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$f'(x) = -6 \cdot x^{-3} - 6 \cdot x^{-4} = -6 \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = -6 \cdot \frac{x+1}{x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \infty$
$x+1$	–	+	+
x^4	+	+	+
f '(x)	+	–	–
	sms	smf	smf

---

c)



$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot \cos(2x)$$

	$k \cdot \pi \le x \le (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$	$(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \le x \le (k+1) \cdot \pi$
f '(x)	–	+
	smf	sms

---

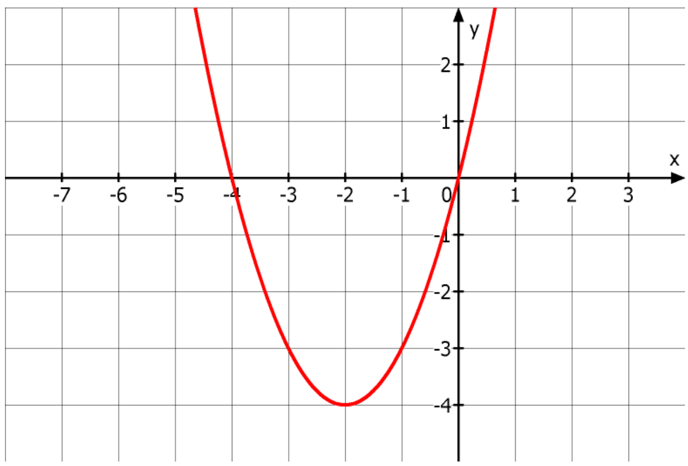
5 Montonieintervalle

a) $f(x) = 4x + x^2$

$f'(x) = 4 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	$+$

Intervall	**Art der Monotonie**
$]-\infty;\ -2]$	streng monoton fallend
$[-2;\ \infty[$	streng monoton steigend

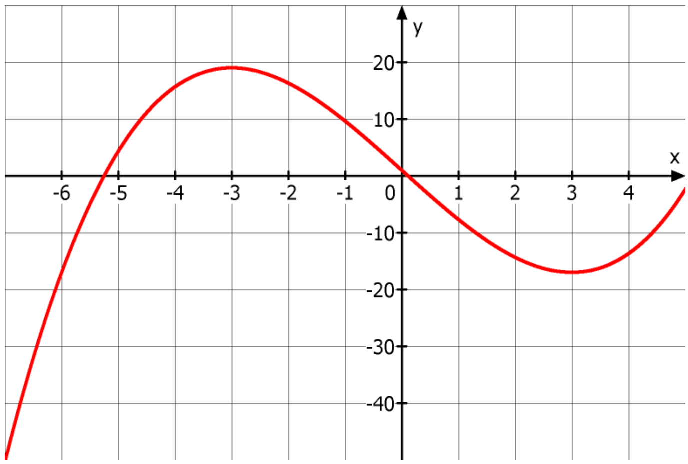


---

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 1 \qquad f'(x) = x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \vee x = 3$

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

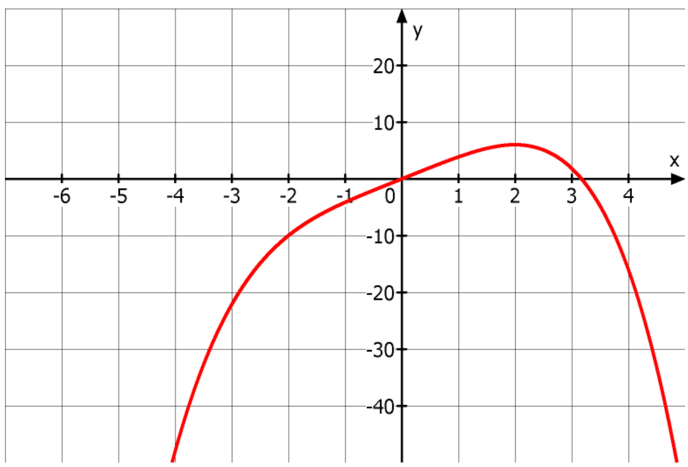
Intervall	**Art der Monotonie**
$]-\infty;\ -3]$	streng monoton steigend
$[-3;\ 3]$	streng monoton fallend
$[-2;\ \infty[$	streng monoton steigend



---

c) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 4x \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Intervall	**Art der Monotonie**
$]-\infty; 2]$	streng monoton zunehmend
$[2; \infty[$	streng monoton abnehmend



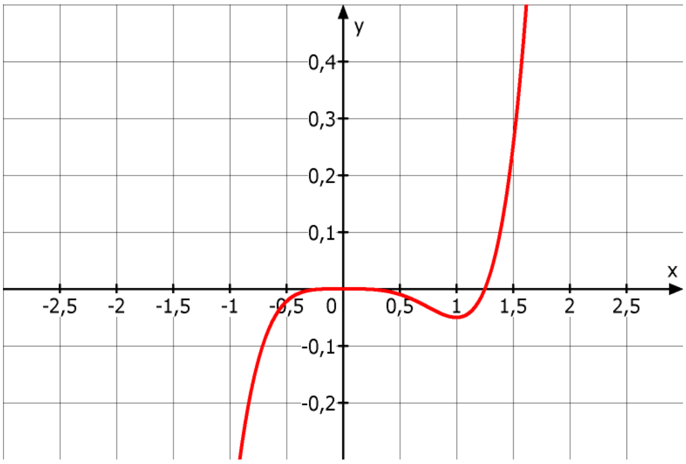
---

d) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$

$f'(x) = x^4 - x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 \cdot (x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 1$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
x^3	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Intervall	**Art der Monotonie**
$]-\infty; 0]$	streng monoton wachsend
$[0; 1]$	streng monoton fallend
$[1; \infty[$	streng monoton wachsend



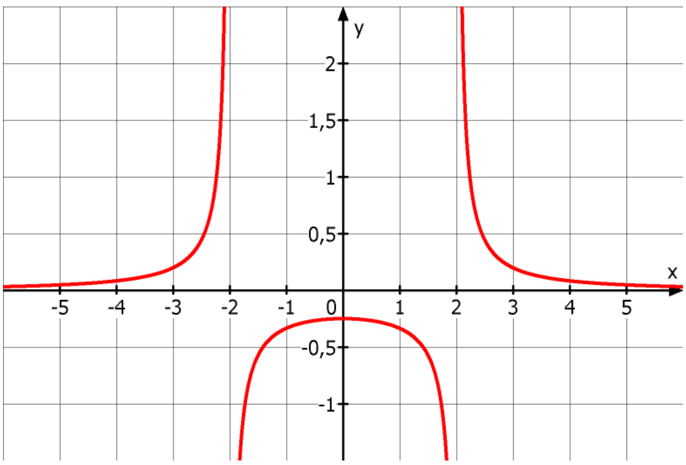
---

e) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-4)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x^2-4)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$

Intervall	**Art der Monotonie**
$]-\infty; -2[$	streng monoton fallend
$]-2; 0]$	streng monon wachsend
$[0; 2[$	streng monoton fallend
$]2; \infty[$	streng monoton fallend

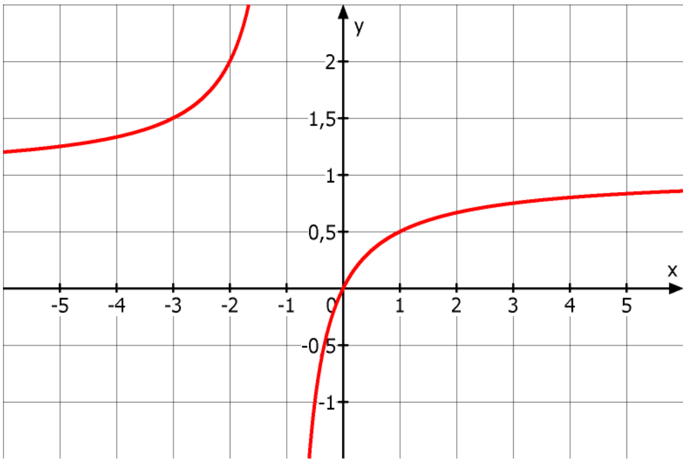


---

f) $f(x) = \frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

Intervall	**Art der Monotonie**

$]-\infty;\ -1[$	streng monoton wachsend
$]-1;\ \infty[$	streng monoton wachsend



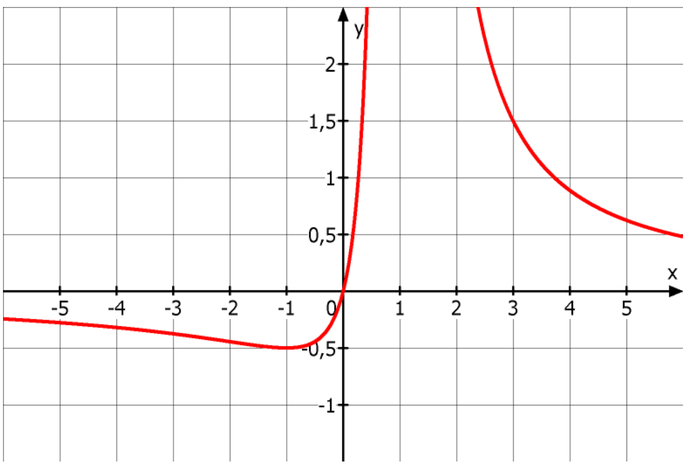
---

f) $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{x+1}{(x-1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Intervall	**Art der Monotonie**
$]-\infty;\ -1]$	streng monoton fallend
$[-1;\ 1[$	streng monoton wachsend
$]1;\ \infty[$	streng monoton fallend



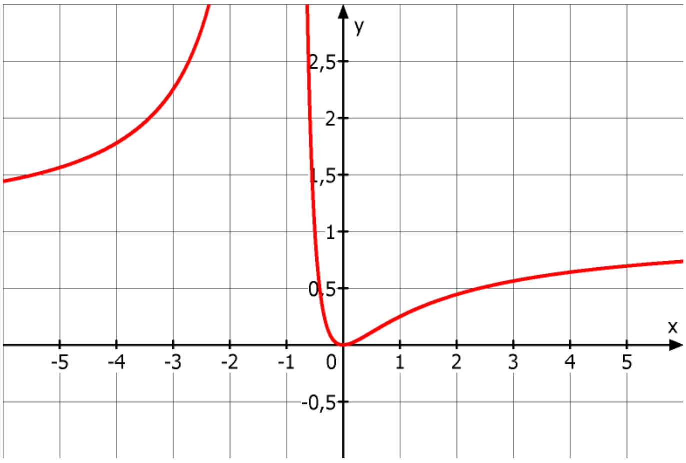
---

g) $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+2x+1) - x^2\cdot(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{2x^2+2x}{(x+1)^4} = \frac{2x}{(x+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

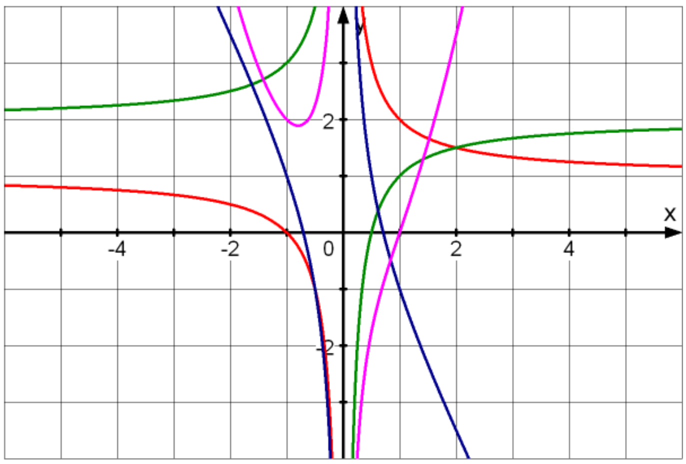
	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \infty$
$2x$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Intervall	**Art der Monotonie**
$]-\infty;\ -1[$	streng monoton wachsend
$]-1;\ 0]$	streng monoton fallend
$[0;\ \infty[$	streng monoton wachsend



---

6 Maximale Monotoniebereiche



a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Intervall	Art der Monotonie
$]-\infty; 0[$	streng monoton fallend
$]0; \infty]$	streng monoton fallend

b) $f(x) = 2 - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x^2}$

Intervall	Art der Monotonie
$]-\infty; 0[$	streng monoton wachsend
$]0; \infty]$	streng monoton wachsend

c) $f(x) = \frac{1}{x} - 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2$

Intervall	Art der Monotonie
$]-\infty; 0[$	streng monoton abnehmend
$]0; \infty]$	streng monoton zunehmend

d) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}) = 0$

Intervall	Art der Monotonie
$]-\infty; -\sqrt[3]{0,5}]$	streng monoton abnehmend
$[-\sqrt[3]{0,5}; 0[$	streng monoton zunehmend
$]0; \infty$	streng monoton zunehmend

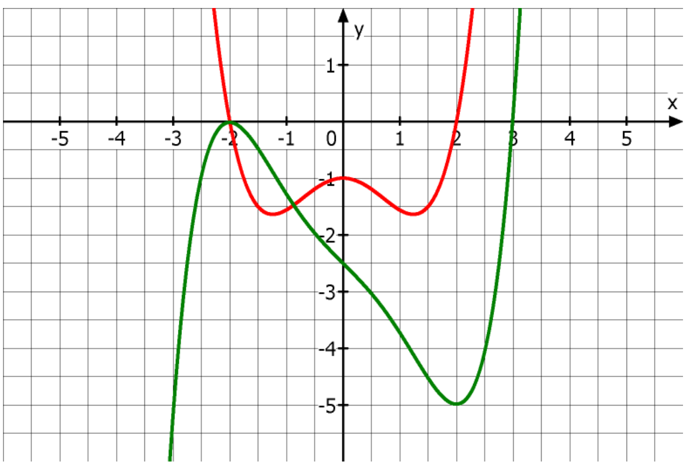
---

7 Punkt auf Graphen

a) Der Punkt D liegt auf dem Graphen von f.

Der Graph von f geht den Punkt $\left(0 \mid -2,5\right)$

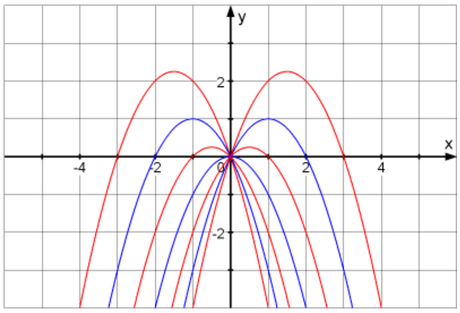
b)



8 Monotonieverhalten von Funktionenscharen

a) $f_a(x) = ax - x^2 \quad \Rightarrow \quad f_a'(x) = a - 2x$

f_a ist $]-\infty; \frac{a}{2}]$ streng monoton wachsend und in $[\frac{a}{2}; \infty[$ streng monton fallend.



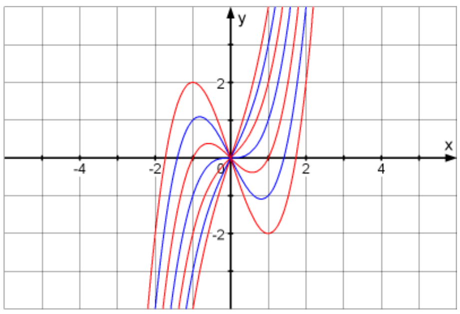
b) $f_a(x) = x^3 - ax \quad \Rightarrow \quad f_a'(x) = 3x^2 - a$

Fallunterscheidung :

$a \leq 0$: f_a ist in $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

$a > 0$: f_a ist in $]-\infty; -\sqrt{\frac{a}{3}}]$ streng monoton wachsend,

in $[-\sqrt{\frac{a}{3}}; \sqrt{\frac{a}{3}}]$ streng monoton fallend und in $[\sqrt{\frac{a}{3}}; \infty[$ streng monoton wachsend.



c) $f_a(x) = ax^3 - ax^2 \quad \Rightarrow \quad f_a'(x) = 3ax^2 - 2ax$

Fallunterscheidung :

$\boxed{a > 0}$:

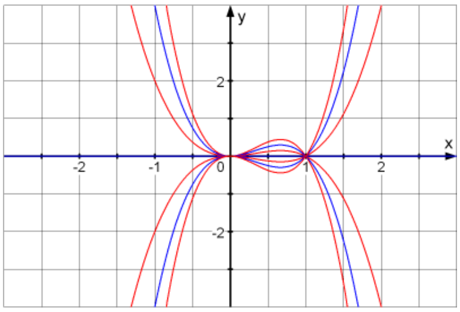
f_a ist in $]-\infty; 0]$ streng monoton wachsend, in $[0; \frac{2}{3}]$ streng monoton fallend und in $[\frac{2}{3}; \infty[$ streng monoton wachsend.

$\boxed{a > 0}$:

f_a ist in $]-\infty; 0]$ streng monoton fallend,

in $[0; \frac{2}{3}]$ streng monoton wachsend und in $[\frac{2}{3}; \infty[$ streng monoton fallend.

Für $a = 0$ ergibt sich die konstante Funktion $f: x \rightarrow y = 0$



---

9 Zuordnung Funktion → Ableitung

$G_a \rightarrow f_1'$ und $G_b \rightarrow f_2'$ sowie $G_c \rightarrow f_4'$

---

10 Zuordnung Funktion → Graph der Stammfunktion

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \rightarrow G_2$$

Nur die durch G_2 dargestellte Funktion hat in ihrem Definitionsbereich eine postive Ableitung.

G 11 Exponentielles Wachstum

$$\dot{f}(t) = k \cdot f(t)$$

G 12 Geometrischer Ort

Die Punkte liegen auf dem Thaleskreis über $\left[AB\right]$ und der Parallen zu AB im Abstand d.

Es gibt vier, zwei oder keine derartige Punkte, je nachdem ob $0 < d < r$, $d = r$ oder $d > r$ ist.