8 Summen- und Faktorregel

---

3 Bestimmung von Ableitungen

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} = 1 + x^{1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

b) $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} = x^2 - x^{-2} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2x - (-2x^{-3}) = 2x + \frac{2}{x^3}$

c) $f(z) = \frac{4}{3}z^6 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \frac{4}{3}\cdot 6z^5 = 8z^5$

d) $f(x) = x^3 + x^{-5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 5x^{-6} = 3x^2 - \frac{5}{x^6}$

e) $g(u) = u^{-8} - 8u^3 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -8u^{-9} - 24u^2 = -\frac{8}{u^9} - 24u^2$

f) $f(x) = \frac{2x}{5} + \frac{5}{x^2} = \frac{2}{5}x + 5x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{5} + 5\cdot(-2x^{-3}) = \frac{2}{5} - \frac{10}{x^3}$

g) $f(x) = \frac{3}{4x^2} = \frac{3}{4}x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3}{4}\cdot(-2x^{-3}) = -\frac{3}{2}x^{-3}$

h) $f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

i) $g(x) = \frac{3}{5}x^{-5} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{3}{5}\cdot(-5x^{-6}) = -3x^{-6} = -\frac{3}{x^6}$

k) $h(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{10}} - 3 = \frac{1}{2}x^{-10} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{1}{2}\cdot(-10x^{-11}) = -5x^{-11} = -\frac{5}{x^{11}}$

---

4 Ableitungswerte

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 10x - 3 \Rightarrow f'(0) = -3\,;\; f'(1) = -1$

Die Tangente im Punkt $\left(0\,|\,1\right)$ fällt.

---

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^8 - 2x^5 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 5 \Rightarrow f'(x) = 6x^7 - 10x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$

$\Rightarrow f'(0) = 0\,;\, f'(1) = -\frac{13}{6}$

Die Tangente im Punkt $\left(0 \mid -5\right)$ verläuft waagrecht.

---

c) $f(x) = 0{,}8x^4 - 1{,}3x^2 + ax - 2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3{,}2x^3 - 2{,}6x + a \;\Rightarrow\; f'(0) = a\,,\; f'(1) = 0{,}6 + a$

$a > 0$: Die Tangente im Punkt $\left(0 \mid -2\right)$ steigt.

$a = 0$: Die Tangente im Punkt $\left(0 \mid -2\right)$ verläuft waagrecht.

$a < 0$: Die Tangente im Punkt $\left(0 \mid -2\right)$ fällt.

---

d) $f(x) = \frac{2}{3}x^6 - \frac{5}{6}x^2 - 3x - \frac{2}{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 4x^5 - \frac{5}{3} - 3 + \frac{2}{x^2} \;\Rightarrow\; f'(1) = \frac{4}{3}$

Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert.

---

e) $f(x) = -x^3 + 1{,}5x^2 - 3{,}5x + 2{,}5 \;\Rightarrow\; f'(x) = -3x^2 + 3x - 3{,}5$

$\Rightarrow\; f'(0) = -3{,}5\,;\; f'(1) = -3{,}5$

Die Tangente im Punkt $\left(0 \mid -1\right)$ fällt.

---

f) $f(x) = ax^3 - 5x^5 - 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3ax^2 - 25x^4 \;\Rightarrow\; f'(0) = 0\,;\; f'(1) = 3a - 25$

Die Tangente im Punkt $\left(0 \mid -1\right)$ verläuft waagrecht.

---

g) $f(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x \;\Rightarrow\; f'(x) = 7x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 1 \;\Rightarrow\; f'(0) = 1\,;\; f'(1) = 3$

Die Tangente im Punkt $\left(0 \mid 0\right)$ steigt.

---

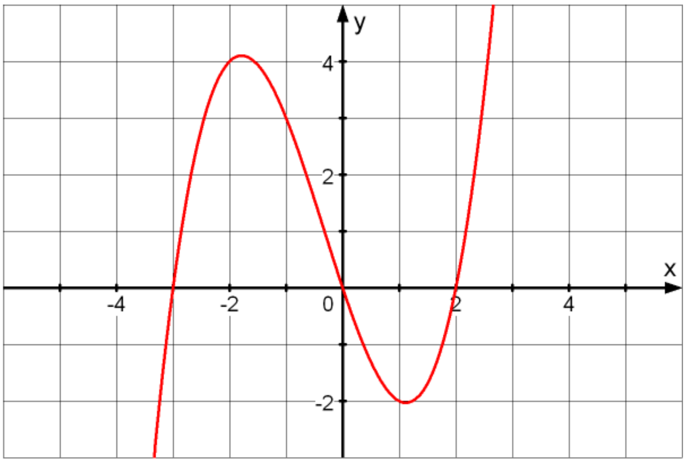
h) $f(x) = 2x^n - 5 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2n \cdot x^{n-1} \;\Rightarrow\; f'(0) = 0,\, n \geq 0\,;\; f'(1) = -3$

Für $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, verläuft die Tangente im Punkt $\left(0 \mid -3\right)$ waagrecht.

Für $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, ist f an der Stelle 0 nicht definiert.

---

5 Funktionsgraph



a) Ableitung : $h_3(x) = \frac{3}{2}x^2 + x - 3$

Begründung:

$h_1(0) = 1 > 0$ und damit kann h_1 nicht die Ableitung von g sein.

$h_2(-2) = -8 < 0$ und damit kann h_2 nicht die Ableitung von g sein.

$h_4(2) = -2$ und damit kann h_3 nicht die Ableitung von g sein.

Also ist h_3 die Ableitung von g.

b) Stammfunktion : $k_2(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

Begründung:

$k_1'(x) = x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$ hat an der Stelle 0 keine Nullstelle.

$k_2'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$ hat die an den Stellen -3, 0 und 2 und $k_2'(-1) = 3$

$k_3'(x) = x^2 + x$ hat an den Stellen -1 und 0 Nullstellen.

$k_4'(x) = -4x^3 + x^2 + x \quad \Rightarrow \quad k_4'(-1) = 4 \neq -3$

Also ist k_2 Stammfunktion von g.

---

7 Ableitungen

a) $f(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0,\ g(x) = -\frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 0$ und $h(x) = c \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 0$

b) $f(x) = 2x+3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2,\ g(x) = -\frac{1}{2}x+t \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\frac{1}{2}$

und $h(x) = mx+t \quad \Rightarrow \quad h'(x) = m$

---

8 Ableitungsfunktion

a)	$f(x) = 6x^2 + \frac{3}{2x} - 1$	$f'(x) = 12x - \frac{3}{2x^2}$
b)	$f(a) = \frac{1}{2}a^{-3} - 3a$	$f'(a) = -\frac{3}{2}a^{-4} - 3$
c)	$g(x) = 2x^2 - 3a^2$	$g'(x) = 4x$
d)	$h(a) = 2x^2 - 3a^2$	$f'(x) = -6a$
e)	$f(t) = 4t^{-1} - at$	$f'(x) = -4 \cdot t^{-2} - a$
f)	$g(x) = 3a^2 - a$	$g'(x) = 0$
g)	$h(x) = \frac{4}{3}x^4 - z + \frac{1}{x}$	$h'(x) = \frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{x^2}$
h)	$f(z) = \frac{3}{8}z^4 - \frac{3}{2}z^2$	$f'(z) = \frac{3}{2}z^3 - 3z$
i)	$g(x) = 1{,}3x^6 - 2{,}1z^3 + 8z - \frac{1}{2z^2}$	$g'(x) = 7{,}8x^5$
k)	$f(t) = (2t^2 - 3t) \cdot t = 2t^3 - 3t^2$	$f'(t) = 6t^2 - 6t$

---

9 Zuordungen von Funktionen zu ihrer Ableitung und einer Stammfunktion

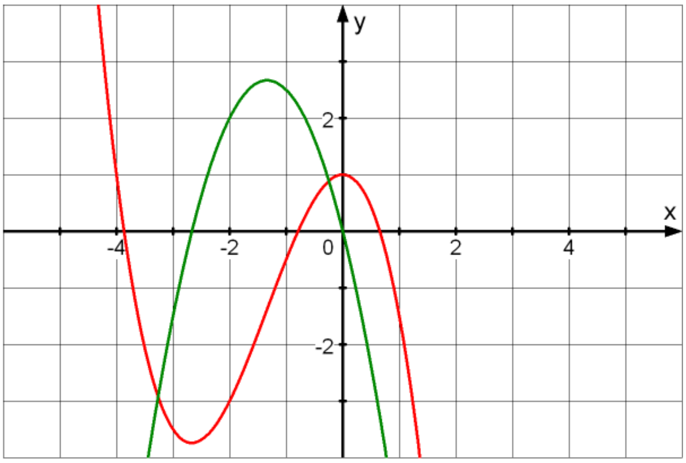
Funktion	**Ableitung**	**Stammfunktion**
$f_1(x) = 3x + \frac{1}{x^2}$	$f_1'(x) = 3 - \frac{2}{x^3}$	$F_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x}$
$f_2(x) = 2{,}4x^2 - \frac{1}{2}x^4$	$f_2(x) = 4{,}8x - 2x^3$	$F_2(x) = 0{,}8x^3 - \frac{1}{10}x^5$
$f_3(x) = -\frac{5}{x^2} - 4x$	$f_3'(x) = \frac{10}{x^3} - 4$	$F_3(x) = \frac{5}{x} - 2x^2$
$f_4(x) = x^3 - 2x^2$	$f_4(x) = 3x^2 - 4x$	$F_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$
$f_5(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$	$f_5'(x) = \frac{6}{x^3}$	$F_5(x) = 3x + \frac{3}{x}$
$f_6(x) = 4x^3 - 3x^4$	$f_6'(x) = 12x^2 - 12x^3$	$F_6(x) = x^4 - \frac{3}{5}x^4$

Lösungswort: HOSE

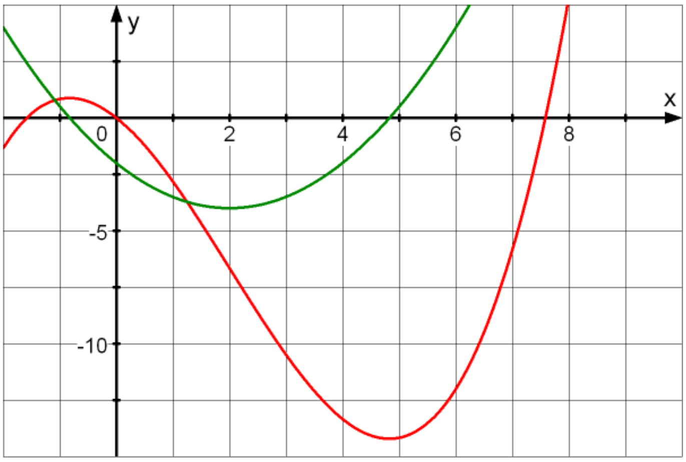
---

10 Graphen von Ableitungs- und Stammfunktion

a)



b)



---

11 Zweimaliges Ableiten

$$f(x) = 0{,}4x^5 - \frac{5}{6}x^3 - 4x^2 + x - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x^4 - \frac{5}{2}x^2 - 8x + 1 \quad \Rightarrow$$

$$g(x) = \left[f'(x)\right]' = 8x^3 - 5x - 8$$

$$\deg\left[f'(x)\right] = 4 \text{ und } \deg\left[g(x)\right] = 3$$

---

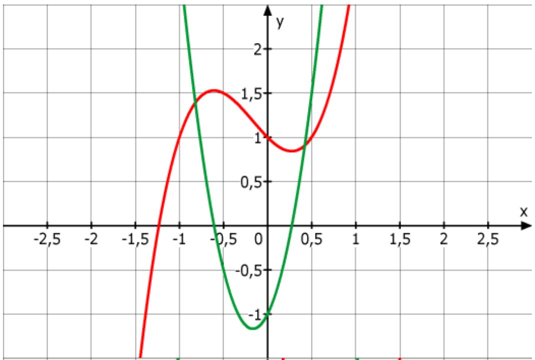
12 Bestimmung der Ableitungsfunktion und deren Nullstellen

	Funktion	Ableitung	Nullstellen von f '
a)	$f(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$	$f'(x) = \frac{5}{3}x - \frac{3}{2}$	$= 0{,}6$
b)	$f(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$	$f'(x) = 6x^2 + 2x - 1$	$x = \frac{-1-\sqrt{7}}{6} \vee x = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$

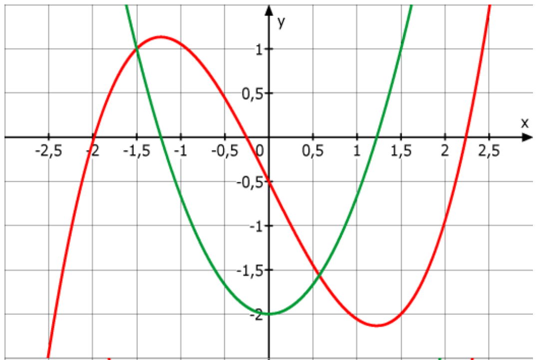
c)	$f(x) = \frac{4}{9}x^3 - 2x - \frac{1}{2}$	$f'(x) = \frac{4}{3}x^2 - 2$	$x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{2}$
d)	$f(x) = 3x^3 + \frac{2}{x} - 4$	$f'(x) = 9x^2 - \frac{2}{x^2}$	$x = -\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{18} \vee x = \frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{18}$
e)	$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$	$f'(x) = 3x^3 - 2x^2 - x$	$x = -\frac{1}{3} \vee x = 0 \vee x = 1$
f)	$f(x) = \frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{8}x^3 + 3x - \frac{1}{2}$	$f'(x) = \frac{10}{3}x^4 + \frac{3}{8}x^2 + 3$	keine

Graphische Veranschaulichung:

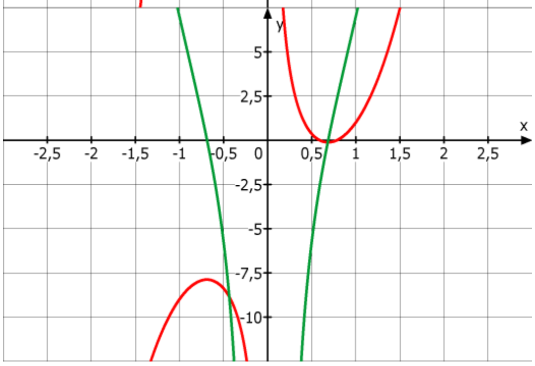
a)



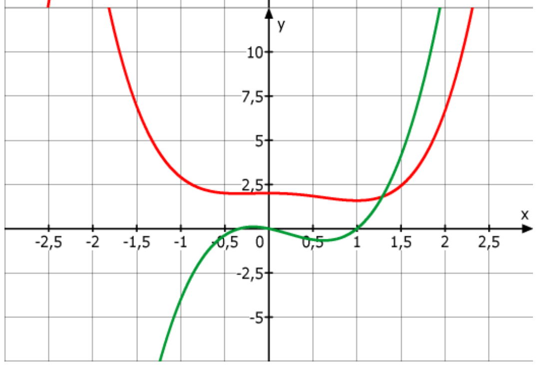
b)



c)



d)



---

13 Symmetrie

Gegeben: $f(x) = 2x^4 - x^2 - 3$

a) $f(-x) = 2\cdot(-x)^4 - (-x)^2 - 3 = 2x^4 - x - 3 = f(x)$

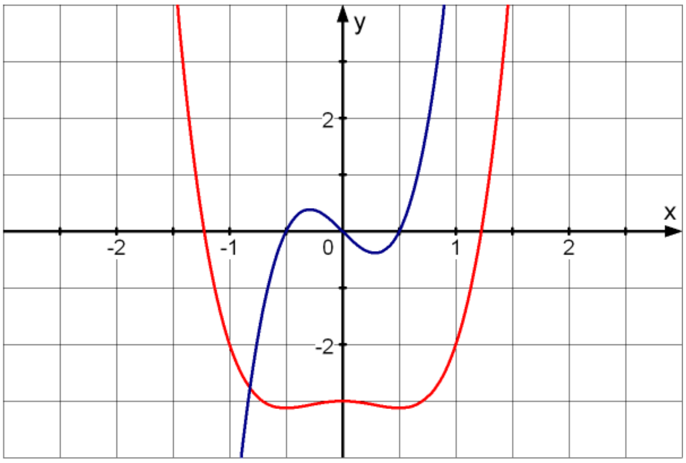
Der Graph von f ist achsensymmetrisch.

b) $f'(x) = 8x^3 - 2x$

c) $f'(-x) = 8\cdot(-x)^3 - 2\cdot(-x) = -8x^3 + 2x = -(8x^3 - 2x) = -f()$

Der Graph der Ableitung ist punktsymmetrisch.

d)



e) Wenn der Graph einer Funktion f zur y-Achse symmetrischist, dann sind dies auch die Tangenten in zueinander symmetrischen Punkten des Graphen.

Geraden, die symmetrisch zur y-Achse liegen, haben aber entgegengesetzte Steigungen.

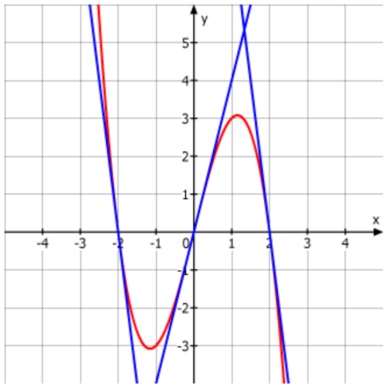
---

14 Tangenten in den Schnittpunkten mit der x-Achse

a) $f(x) = 4x - x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$

$f'(x) = 4 - 3x^2 \quad \Rightarrow$

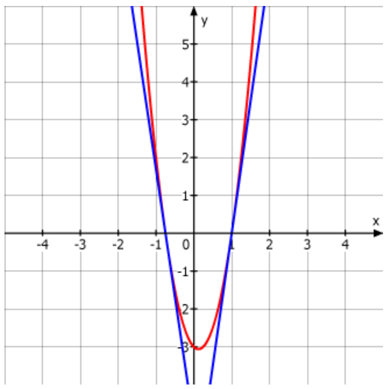
$f'(-2) = -8 \quad f'(0) = 4 \quad f'(2) = -8$



---

b) $f(x) = 4x^2 - x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = -\frac{3}{4}$

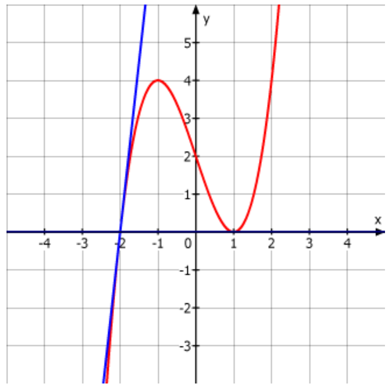
$f'(x) = 8x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(-\frac{3}{4}) = -6\frac{3}{4} \quad f'(1) = 7$



---

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \lor x = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 9 \quad f'(1) = 0$

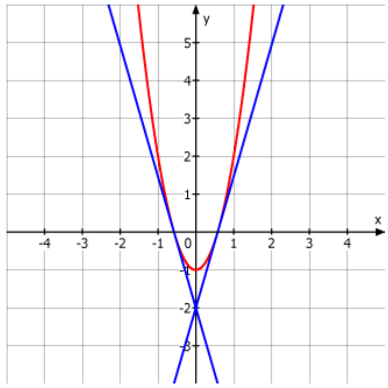


---

d) $f(x) = 3x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \lor x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$f'(x) = 6x \quad \Rightarrow$

$f'(-\frac{1}{3}\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} \quad f'(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

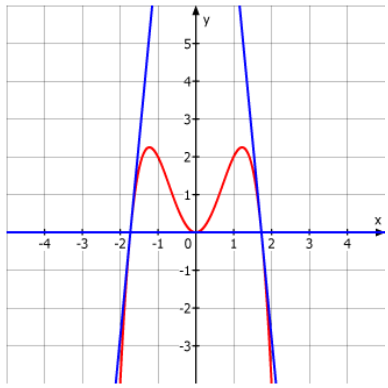


---

e) $f(x) = 3x^2 - x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{3} \lor x = 0 \lor x = \sqrt{3}$

$f'(x) = 6x - 4x^3 \quad \Rightarrow$

$f'(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \quad f'(0) = 0 \quad f'(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$



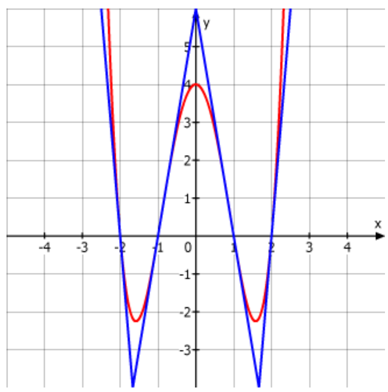
---

f) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x = -2 \lor \ = -1 \lor x = 1 \lor \ = 2$

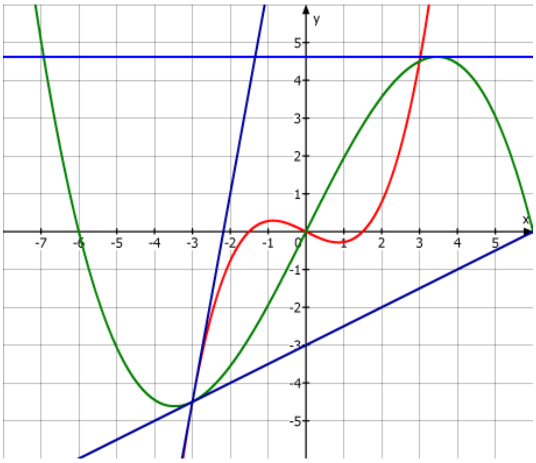
$f'(x) = 4x^3 - 10x \quad \Rightarrow$

$f'(-2) = -12 \quad f'(-1) = 6 \quad f'(1) = -6 \quad f'(2) = 12$



---

15 Schnittwinkel



a) $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{9}x^3 - \frac{x}{2} = -\frac{1}{18}x^3 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \lor x = 0 \lor x = 3$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}$ und $g'(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 2$

$f'(-3) = 5{,}5 \quad g'(-3) = 0{,}5 \quad \tan\alpha = \left|\frac{5{,}5 - 0{,}5}{1 + 5 \cdot 0{,}5}\right| = \frac{10}{7} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 55°$

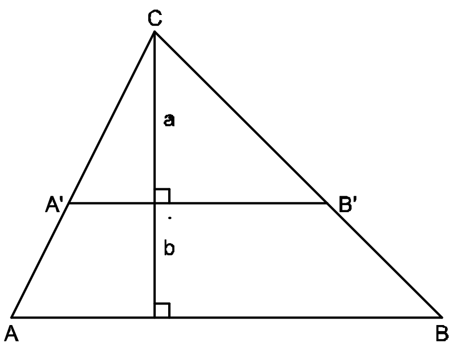
$f'(0) = -0{,}5 \quad g'(0) = 2 \quad \beta = 90°$

$f'(3) = 5{,}5 \quad g'(3) = 0{,}5 \quad \gamma \approx 55°$

b) $g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2\sqrt{3} \lor x = 2\sqrt{3}$

$g(2\sqrt{3}) = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

G 16 Halbierung eines Dreiecks



$$\frac{A_{A'B'C}}{A_{ABC}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{h}\right)^2 = k^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{1}$$

G 17 Affine Abbildung einer Funktion

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 2 \quad \rightarrow \quad f^*(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$$

Nullstellen : $x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$ bzw. $x = -1 \vee x = 4$
