

5 Stammfunktion

2 Stammfunktionen

a)	$F : x \rightarrow 0,5x^2$	$f : x \rightarrow x$	ja
b)	$F : x \rightarrow 2x - 2$	$f : x \rightarrow -2$	nein
c)	$F : x \rightarrow 3x^2 + 1$	$f : x \rightarrow 6x$	ja
d)	$F : x \rightarrow x^2 - 2x$	$f : x \rightarrow 2x - 2$	ja
e)	$F : x \rightarrow -x^3 + 3$	$f : x \rightarrow -3x$	nein

Erforderliche Rechnungen

$$\begin{aligned} \text{a) } F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0,5x^2 - 0,5x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0,5 \cdot (x + x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} 0,5 \cdot (x + x_0) = x_0 \Rightarrow F'(x) = x = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(2x - 2) - (2x_0 - 2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x - 2x_0}{x - x_0} = 2 \\ &\Rightarrow F'(x) = 2 \neq f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(3x^2 + 1) - (3x_0^2 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \\ &\lim_{x \rightarrow x_0} 3 \cdot (x + x_0) = 6x_0 \Rightarrow F'(x) = 6x = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2 - 2x) - (x_0^2 - 2x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2 - x_0^2) - 2 \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \\ &\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0) \cdot (x - x_0) - 2 \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[(x + x_0) - 2] \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 2x_0 - 2 \\ &\Rightarrow F'(x) = 2x - 2 = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } F'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(-x^3 + 3) - (-x_0^3 + 3)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x^3 + x_0^3}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x^3 + x^2 \cdot x_0 - x^2 \cdot x_0 + x \cdot x_0^2 - x \cdot x_0^2 + x_0^3}{x - x_0} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(-x^2 - x \cdot x_0 - x_0^2) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = -3x_0^2 \Rightarrow F'(x) = -3x^2 \neq f(x)$$

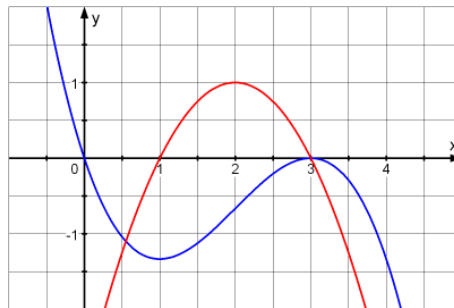
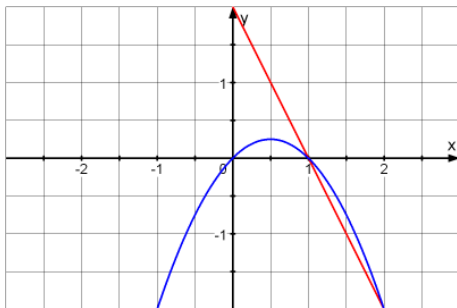
Polynomdivision wäre natürlich auch möglich gewesen.

3 Funktion und Stammfunktion im Koordinatensystem

a) $F : x \rightarrow \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$ (rot) ist Stammfunktion von $f : x \rightarrow x+2$ (blau).

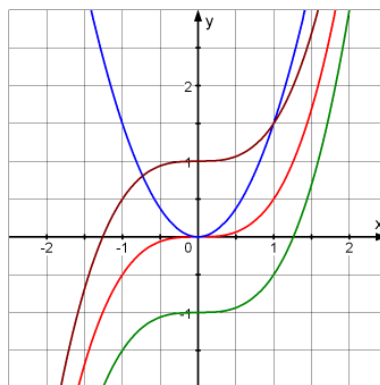
b) $F : x \rightarrow -\frac{1}{x+1} + 1$ (violett) ist Stammfunktion von $f : x \rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}$ (orange).

4 Zuordnung von Stammfunktionen



5 Verschiedene Stammfunktionen

a)



b) $F'(0,8) = f(0,8) = 1,5 \cdot 0,8^2 = 0,96$

Einen weiteren Punkt erhält man für $x = -0,8$.

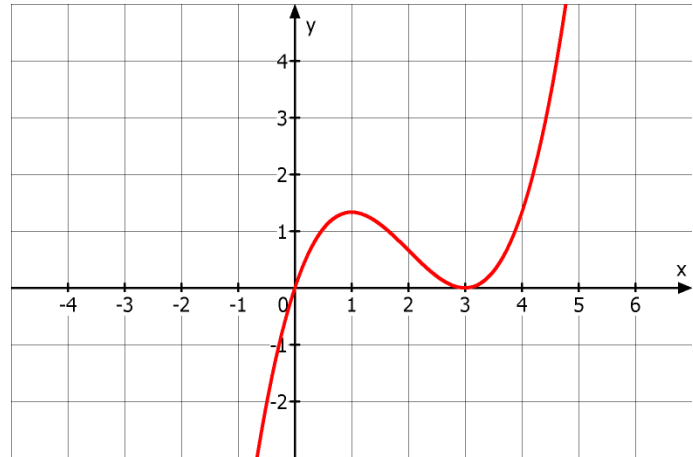
c) $G(x) = 0,5x^3 + 1$ und $H(x) = 0,5x^3 - 1$

d) Die Graphen gehen durch Verschiebung entlang der y-Achse auseinander hervor.

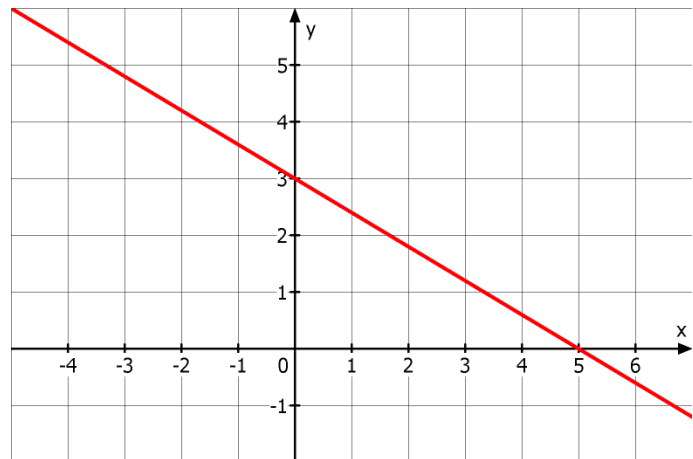
e) $K(x) = 0,5x^3 + 7$

G 6 Funktionen mit bestimmten Eigenschaften

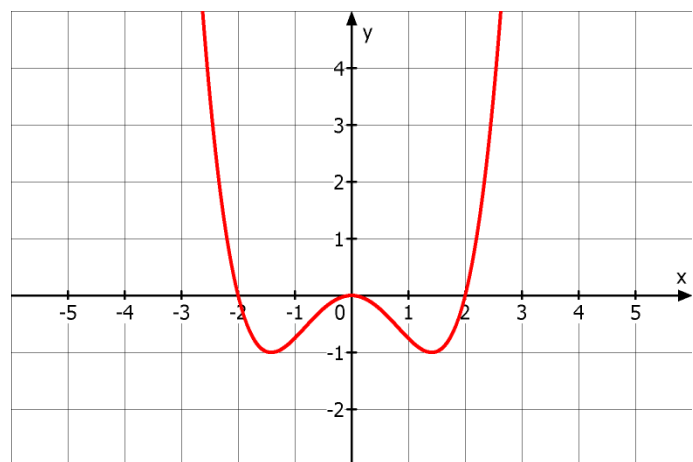
a) $f: x \rightarrow \frac{1}{3}x \cdot (x-3)^2$



b) $g: x \rightarrow -\frac{3}{5}x + 3$



c) $h: x \rightarrow \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot (x^2 - 4)$



d) $h : x \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{(x-1)^4}{(x-2)^2}$

